Inleiding Kansrekening en Statistiek (WISB 161)
Hertentamen

Sjoerd Dirksen

19 april 2022, 09:00-12:00

Dit tentamen bestaat uit 4 vragen, die in totaal 45 punten waard zijn. Als het je niet lukt om een onderdeel van een vraag te beantwoorden, dan is het nog steeds mogelijk om de daarop volgende onderdelen te beantwoorden. Schrijf op elk ingeleverd blad jouw naam en studentnummer en nummer de pagina's. Voorzie elk antwoord van een zorgvuldige motivatie. Vereenvoudig jouw antwoorden voor zover mogelijk. Je mag gebruik maken van de tabellen aan het einde van het tentamen.

Vraag 1 [9 punten]

Zij (X, Y) een discrete kansvector die waarden aanneemt in $\{0, 1, 2\} \times \{0, 1, 2\}$. De waarden van de kansfunctie van (X, Y) worden gegeven in de onderstaande tabel.

	0	1	2
0	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$
1	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{9}$	0
2	$\frac{1}{9}$	0	0

Bereken de covariantie tussen X en Y. Zijn X en Y onafhankelijk?

Vraag 2 [12 punten]

We noemen $m \in \mathbb{R}$ een mediaan van een kansvariabele X als

$$\mathbb{P}(X \geq m) \geq \frac{1}{2} \qquad \text{en} \qquad \mathbb{P}(X \leq m) \geq \frac{1}{2}.$$

(a) Zij X een Poisson verdeelde kansvariabele met parameter $\lambda = \log(2)$ (waarbij log de natuurlijk logaritme is). Laat zien dat de verzameling van alle medianen van X gelijk is aan $[0, 1]$.

(b) Zij X een kansvariabele en zij $X_1, \ldots, X_n$ onafhankelijk en identiek verdeeld met X. Laat zien dat

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\max_{1\leq i\leq n} X_i < m\right) = 0$$

voor elke mediaan m van X.

(c) Zij m een mediaan van X. Is $\max_{1\leq i\leq n} X_i$ een consistente schatter van m?

Vraag 3 [12 punten]

Claudia is bioloog en heeft maiszaden genetisch gemanipuleerd met het doel om deze beter in een droge omgeving te laten groeien. Om te testen of haar experiment gelukt is plant zij 32 gewone en 32 gemanipuleerde zaadjes in potjes. Zij laat de plantjes vervolgens 10 weken onder dezelfde, droge omstandigheden groeien. Noem de lengtes van de plantjes die uit de gewone zaadjes kiemen $X_1, \ldots, X_{32}$ en de lengtes van de plantjes die uit de gemanipuleerde zaadjes kiemen $Y_1, \dots, Y_{32}$. Claudia neemt aan dat alle lengtes onafhankelijk zijn en dat $X_i \sim N(\mu_X, \sigma^2)$ en $Y_i \sim N(\mu_Y, \sigma^2)$ voor alle $1 \le i \le 32$, voor zekere $\mu_X, \mu_Y, \sigma \in (0, \infty)$. Zij wil op basis van deze data een hypothesetoets

$$H_0 : \mu_Y - \mu_X = 0 \qquad \text{versus} \qquad H_1 : \mu_Y - \mu_X > 0$$

uitvoeren.

(a) Leg uit dat Claudia met deze toets het succes van haar experiment toetst.

(b) Zij $V_i = Y_i - X_i$ voor $i = 1, \dots, 32$. Als statistisch toetscriterium gebruikt Claudia

$$\text{verwerp } H_0 \text{ als } \sum_{i=1}^{32} V_i \ge 8.$$

Bij welke waarde van σ is de kans op een type I fout (bij benadering) gelijk aan 1%?

(c) Op welk punt is het model van Claudia niet realistisch en hoe zou dit verbeterd kunnen worden?

Vraag 4 [12 punten]

Sieuwerd organiseert een tentamen voor het vak Statistiek bij bedrijfskunde. Hij wil van te voren een inschatting maken hoeveel studenten het tentamen zullen halen. Hij weet niet precies hoeveel studenten naar het tentamen zullen komen. Hij neemt aan dat dit aantal N Poisson verdeeld is met parameter λ. Verder neemt hij aan dat elke student die komt opdagen een kans p heeft om het tentamen te halen. Tot slot neemt hij aan dat de studenten elkaars resultaten niet kunnen beïnvloeden en dat de resultaten ook niet beïnvloed worden door het aantal studenten dat aanwezig is.

(a) Beargumenteer dat het aantal studenten dat het tentamen haalt dezelfde kansverdeling heeft als $\sum_{i=1}^{N} X_i$, waarbij $(X_i)_{i \ge 1}$ een rij onafhankelijke, Bernoulli verdeelde kansvariabelen met parameter p is. Hoe moeten we deze uitdrukking opvatten als $N = 0$?

(b) Laat zien dat het aantal studenten dat het tentamen haalt Poisson verdeeld is met parameter λp.

Hint: wat zou de kansverdeling van het aantal geslaagden zijn als N bekend zou zijn?

Een aantal belangrijke kansverdelingen

Discrete kansverdelingen

Naam	Kansfunctie	Verwachtingswaarde	Variantie
Ber(p)	$\mathbb{P}(X = 1) = p = 1 - \mathbb{P}(X = 0)$	p	$p(1-p)$
Binom(n, p)	$\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \ \ k = 0, \dots, n$	np	$np(1-p)$
Geom(p)	$\mathbb{P}(X = k) = p(1-p)^{k-1}, \ \ k \in \mathbb{N}$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$
Pois(λ)	$\mathbb{P}(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}, \ \ k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$	λ	λ

Continue verdelingen

Naam	Kansdichtheid	Verwachtingswaarde	Variantie
Unif(a, b)	$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{als } a < x < b \\ 0 & \text{elders} \end{cases}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
Exp(λ)	$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{als } x > 0 \\ 0 & \text{elders} \end{cases}$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$
N(μ, σ^2)	$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp(-(x-\mu)^2/(2\sigma^2))$	μ	σ^2