Uitwerkingen voor Tentamen WISB141 Inleiding Meetkunde

woensdag 13 april 2022 13:30–16:30

1. (a) Nee, want d voldoet niet aan de driehoeksongelijkheid. Bij voorbeeld is
$$4 = d(-1,1) \not\leq d(-1,0) + d(0,1) = 1 + 2 = 3.$$
   (b) Nee, want d voldoet niet aan de driehoeksongelijkheid. Bij voorbeeld is
$$3 = d(-3,0) \not\leq d(-3,1) + d(1,0) = 2 + \tfrac{1}{2}.$$

2. (a) Ja. De mogelijke isometrieën van $\mathbb{E}^2$ zijn volgens de classificatiestelling: translatie, rotatie, spiegeling, en glijspiegeling. We kunnen dus laten zien dat T een rotatie is door te laten zien dat T geen translatie, spiegeling, of glijspiegeling kan zijn. Omdat $T \neq I$ hoeven we verder alleen niet-triviale versies van deze isometrieën te behandelen. Niet-triviale translaties zijn van de vorm $S(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + \mathbf{v}$ met $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$. Daardoor is $S^m(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + m\mathbf{v} \neq I(\mathbf{x})$. Dus T kan geen translatie zijn. Als S een glijspiegeling is, worden punten $\mathbf{x}$ op de spiegellijn getransleerd door $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$. Daardoor is $S^m(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + m\mathbf{v} \neq I(\mathbf{x})$ voor zulke punten $\mathbf{x}$. Dus T kan geen glijspiegeling zijn. Voor spiegelingen S gelden $S^2 = I$, dus T kan geen spiegeling zijn. De enige optie is dus rotatie. Rotaties met rotatiehoek $2\pi/m$ voldoen inderdaad duidelijk aan de voorwaarden.
   (b) Nee. Beschouw bij voorbeeld
$$T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \neq I.$$
   Dan is
$$T^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \neq I,$$
$$T^3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \neq I,$$
   en $T^4 = I$. Verder is T een orthogonale matrix en dus een isometrie. Dus T voldoet aan de voorwaarden met $m = 4$. Maar T is geen rotatie, want T is een indirecte isometrie ($\det T = -1$).

3. (a) Ja. Isometrieën van S^2 corresponderen met orthogonale 3×3-matrices, en die zijn inproductbewarend. Daardoor is
$$\mathbf{p} \cdot \mathbf{q} = T(\mathbf{p}) \cdot T(\mathbf{q}) = \mathbf{p} \cdot -\mathbf{q} = -(\mathbf{p} \cdot \mathbf{q})$$
   waaruit volgt dat $\mathbf{p} \cdot \mathbf{q} = 0$.
   (b) Nee. Zij bij voorbeeld
$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$
   T is een orthogonale 3×3-matrix en dus een isometrie van S^2. Beschouw de punten $\mathbf{p} = (1,0,0) \in S^2$, $\mathbf{q} = (0,0,1) \in S^2$, en $\mathbf{v} = (0,1,0) \in S^2$. Dan is $T(\mathbf{p}) = \mathbf{p}$ en $T(\mathbf{q}) = -\mathbf{q}$ en $\mathbf{p} \cdot \mathbf{v} = 0$. Echter is $T(\mathbf{v}) = \mathbf{v} \neq -\mathbf{v}$. Dit is dus een tegenvoorbeeld.

4. Neem $\mathbf{v} = (\sqrt{3}, 2, 0)$ en $\mathbf{w} = (0, 0, 1)$. De verzamelingen

$$\mathbf{v}^{\perp_L} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : \mathbf{x} \cdot_L \mathbf{v} = 0\} = \{(t, x, y) \in \mathbb{R}^3 : -\sqrt{3}t + 2x = 0\}$$

en

$$\mathbf{w}^{\perp_L} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : \mathbf{x} \cdot_L \mathbf{w} = 0\} = \{(t, x, y) \in \mathbb{R}^3 : y = 0\}$$

zijn twee verschillende vlakken door de oorsprong. Hun doorsnede $\mathbf{v}^{\perp_L} \cap \mathbf{w}^{\perp_L}$ is dus een lijn door de oorsprong. De punt $\mathbf{p} \in H^2$ ligt in deze doorsnede want $\mathbf{p} \cdot_L \mathbf{v} = 0$ en $\mathbf{p} \cdot_L \mathbf{w} = 0$. Een lijn door de oorsprong snijdt H^2 maximaal een keer, dus er zijn geen andere snijpunten van $\mathbf{v}^{\perp_L} \cap H^2$ en $\mathbf{w}^{\perp_L} \cap H^2$. Omdat $\mathbf{v}^{\perp_L}$ en $\mathbf{w}^{\perp_L}$ vlakken door de oorsprong zijn, en niet-lege doorsneden maken met H^2, zijn $\mathbf{v}^{\perp_L} \cap H^2$ en $\mathbf{w}^{\perp_L} \cap H^2$ groothyperbolen.

5. Stel dat A' en B' twee verschillende punten van Γ zijn. Dat betekent dat $A' = \frac{1}{2}(A + T(A))$ en $B' = \frac{1}{2}(B + T(B))$ voor twee punten $A, B \in \ell$. Deze punten A en B moeten verschillend zijn, want anders wordt $A' = B'$. De lijn ℓ is dus de opspansel van A en B. Met andere worden bestaat ℓ uit alle punten van de vorm $P = \lambda A + (1 - \lambda)B$ met $\lambda \in \mathbb{R}$. Daardoor is

$$\begin{aligned}
\Gamma &= \{\tfrac{1}{2}(P + T(P)) : P \in \ell\} \\
&= \{\tfrac{1}{2}(\lambda A + (1-\lambda)B + T(\lambda A + (1-\lambda)B)) : \lambda \in \mathbb{R}\} \\
&= \{\tfrac{1}{2}(\lambda A + (1-\lambda)B + \lambda T(A) + (1-\lambda)T(B)) : \lambda \in \mathbb{R}\} \\
&\quad \text{(omdat affien-lineaire combinaties bewaard zijn door affiene transformaties)} \\
&= \{\lambda \underbrace{\left(\tfrac{1}{2}(A + T(A))\right)}_{=A'} + (1-\lambda) \underbrace{\left(\tfrac{1}{2}(B + T(B))\right)}_{=B'} : \lambda \in \mathbb{R}\}
\end{aligned}$$

Met andere worden is Γ de lijn opgespannen door de twee punten A' en B'.

6. (a) Een punt $(x_0 : x_1 : x_2)$ ligt in $H \cap K$ als $x_0 = 0$ en $x_0 x_2 = -x_0^2 + x_1^2$. Deze vergelijkingen combineren geeft $x_1 = 0$. Dus punten van $H \cap K$ zijn van de vorm $(0 : 0 : x_2)$. Er is een zo'n punt: $(0 : 0 : 1)$ (omdat $(0 : 0 : x_2) = \frac{1}{x_2}(0 : 0 : x_2) = (0 : 0 : 1)$ voor alle $(0 : 0 : x_2) \in \mathbb{P}^2$).

   (b) De doorsnede $H \cap T_1(K)$ bestaat uit alle punten $(x_0 : x_1 : x_2) \in K$ die na de transformatie x_0-coördinaat nul hebben. Uit de eerste rij van de matrix voor T_1 zien we dat dit betekent $x_0 = x_2$. Dit combineren met de vergelijking voor K geeft $2x_0^2 = x_1^2$, dus $x_1 = \pm\sqrt{2}x_0$. De punten van K die na de transformatie x_0-coördinaat nul hebben zijn dus van de vorm $(x_0 : x_1 : x_2) = (x_0 : \pm\sqrt{2}x_0 : x_0) = (1 : \pm\sqrt{2} : 1)$. De elementen van $H \cap T_1(K)$ zijn dus $T_1\big((1 : \pm\sqrt{2} : 1)\big) = (0 : \pm\sqrt{2} : 2)$. Dat wil zeggen, $H \cap T_1(K)$ bestaat uit twee punten.

   (c) Laat

$$T_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

   Deze matrix is inverteerbaar, en dus een projectieve transformatie, want $\det T_2 = 1 \neq 0$. We zien uit de eerste rij van de matrix dat de x_0-coördinaat van $T_2(\mathbf{x})$ nul is dan en slechts dan als de x_0-coördinaat van $\mathbf{x}$ nul is. Uit (a) weten we dat K precies een punt heeft met x_0-coördinaat nul: $(0 : 0 : 1)$. Het enige punt van $T_2(K)$ met x_0-coördinaat nul is dus $T_2\left((0 : 0 : 1)\right) = (0 : 1 : 1)$.