Tentamen WISB141 Inleiding Meetkunde

woensdag 13 april 2022 13:30–16:30

Gebruik bij iedere opgave een nieuw vel (want deze worden per opgave gesplitst voor het nakijken).

Schrijf op elk vel je naam en studentnummer.

---

1. Laat $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ gedefinieerd zijn als 1 pt.

$$d(a,b) = \begin{cases} k\,|a-b| & \text{als } a > 0 \text{ en } b \leq 0 \\ k\,|a-b| & \text{als } b > 0 \text{ en } a \leq 0 \\ |a-b| & \text{in alle andere gevallen.} \end{cases}$$

   (a) Is $(\mathbb{R}, d)$ een metrische ruimte als $k = 2$? Bewijs je antwoord.

   (b) Is $(\mathbb{R}, d)$ een metrische ruimte als $k = \frac{1}{2}$? Bewijs je antwoord.

2. Laat T een isometrie van $\mathbb{E}^n$ zijn. Stel dat $T^m = I$ voor een geheel getal $m > 2$, maar $T^k \neq I$ voor $k = 1, 2, \ldots, m-1$ (waar I de identiteitstransformatie van $\mathbb{E}^n$ is, en $T^m(\mathbf{x}) = \underbrace{T(T(T\ldots}_{m \text{ keer}}(\mathbf{x}))))$. 2 pt.

   (a) In het geval $n = 2$, volgt het dat T een rotatie is? Geef of een bewijs of een tegenvoorbeeld.

   (b) In het geval $n = 3$, volgt het dat T een rotatie is? Geef of een bewijs of een tegenvoorbeeld.

3. Stel dat $T : S^2 \to S^2$ een isometrie is waarvoor $T(\mathbf{p}) = \mathbf{p}$ en $T(\mathbf{q}) = -\mathbf{q}$ (voor twee punten $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in S^2$). 2 pt.

   (a) Volgt het dat het inproduct $\mathbf{p} \cdot \mathbf{q}$ nul is? Geef of een bewijs of een tegenvoorbeeld.

   (b) Volgt het dat als $\mathbf{v} \in S^2$ voldoet aan $\mathbf{p} \cdot \mathbf{v} = 0$, dan is $T(\mathbf{v}) = -\mathbf{v}$? Geef of een bewijs of een tegenvoorbeeld.

4. Geef een voorbeeld van twee vectoren $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$ zodat $\mathbf{v}^{\perp_L} \cap H^2$ en $\mathbf{w}^{\perp_L} \cap H^2$ twee groothyperbolen zijn met als enige snijpunt $\mathbf{p} = (2, \sqrt{3}, 0) \in H^2$. Laat zien dat je voorbeeld voldoet aan de voorwaarden. (De verzameling $\mathbf{v}^{\perp_L}$ is gedefinieerd als $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : \mathbf{x} \cdot_L \mathbf{v} = 0\}$.) 2 pt.

5. Gegeven zijn een lijn ℓ in $\mathbb{A}^2$ en een affiene transformatie $T : \mathbb{A}^2 \to \mathbb{A}^2$. Beschouw de verzameling $\Gamma = \{\frac{1}{2}(P + T(P)) : P \in \ell\}$. Laat zien dat als Γ minstens twee punten bevat, dan is Γ een lijn. 1,5 pt.

6. Laat $H = \{(x_0 : x_1 : x_2) \in \mathbb{P}^2 : x_0 = 0\}$ de oneigenlijke rechte in het projectieve vlak $\mathbb{P}^2$ zijn, en beschouw de verzameling $K = \{(x_0 : x_1 : x_2) \in \mathbb{P}^2 : x_0 x_2 = -x_0^2 + x_1^2\}$. 1,5 pt.

   (a) Bepaal $H \cap K$. Hoeveel elementen heeft $H \cap K$?

   (b) Laat $T_1 : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^2$ de projectieve transformatie

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   zijn. Bepaal $H \cap T_1(K)$. Hoeveel elementen heeft $H \cap T_1(K)$?

   (c) Geef een voorbeeld van een projectieve transformatie T_2 waarvoor $H \cap T_2(K) = \{(0 : 1 : 1)\}$. Laat zien dat je voorbeeld voldoet aan de voorwaarden.