Uitwerkingen voor Tentamen WISB141 Inleiding Meetkunde

woensdag 6 juli 2022 13:30–16:30

1. Ja. Laat

$$\Delta(a,b) = \begin{cases} 1 & \text{als } a > 0 \text{ en } b \leq 0 \\ 1 & \text{als } b > 0 \text{ en } a \leq 0 \\ 0 & \text{in alle andere gevallen.} \end{cases}$$

Met andere woorden is $d(a,b) = |a-b| + \Delta(a,b)$.

Bewijs dat $d(a,b) = 0 \iff a = b$:

Stel dat $d(a,b) = 0$. Dus is $|a-b| + \Delta(a,b) = 0$. Omdat $|a-b|$ en $\Delta(a,b)$ niet negatief kunnen zijn, moeten ze allebei nul zijn. Dus is $a = b$ want in andere gevallen is $|a-b|$ niet nul.

Stel dat $a = b$. Dan is $d(a,b) = d(a,a) = |a-a| + \Delta(a,a) = 0$.

Bewijs dat $d(a,b) = d(b,a)$:

Dit volgt uit $|a-b| = |b-a|$ en $\Delta(a,b) = \Delta(b,a)$. De eerste gelijkheid is welbekend en de tweede kunnen we verifiëren door alle mogelijke combinaties van waarden van of ≤ 0 of > 0 voor de variabelen te checken:

a	b	$\Delta(a,b)$	$\Delta(b,a)$
≤ 0	≤ 0	0	0
≤ 0	> 0	1	1
> 0	≤ 0	1	1
> 0	> 0	0	0

Bewijs van driehoeksongelijkheid:

De driehoeksongelijkheid volgt door optelling van

$$|a-b| \leq |a-c| + |c-b| \tag{1}$$

en

$$\Delta(a,b) \leq \Delta(a,c) + \Delta(c,b). \tag{2}$$

(1) is welbekend en (2) kunnen we verifiëren door alle mogelijke combinaties van waarden van of ≤ 0 of > 0 voor de variabelen te checken:

a	b	c	$\Delta(a,b)$	$\Delta(a,c)$	$\Delta(c,b)$
≤ 0	≤ 0	≤ 0	0	0	0
≤ 0	≤ 0	> 0	0	1	1
≤ 0	> 0	≤ 0	1	0	1
≤ 0	> 0	> 0	1	1	0
> 0	≤ 0	≤ 0	1	1	0
> 0	≤ 0	> 0	1	0	1
> 0	> 0	≤ 0	0	1	1
> 0	> 0	> 0	0	0	0

2. Een tegenvoorbeeld is
$$T = \mathrm{Tr}_{(2,0)} = \mathrm{Sp}_{x=1} \circ \mathrm{Sp}_{x=0} = \mathrm{Sp}_{x=3} \circ \mathrm{Sp}_{x=2}.$$
Om te verifiëren dat deze dezelfde isometrieën zijn, is het genoeg om te verifiëren dat ze hetzelfde effect hebben op drie niet-collineaire punten, bij voorbeeld $(0,0)$, $(1,0)$, en $(0,1)$. Dat is eenvoudig te checken:

$\mathbf{x}$	$\mathrm{Tr}_{(2,0)}(\mathbf{x})$	$\mathrm{Sp}_{x=0}(\mathbf{x})$	$\mathrm{Sp}_{x=1} \circ \mathrm{Sp}_{x=0}(\mathbf{x})$	$\mathrm{Sp}_{x=2}(\mathbf{x})$	$\mathrm{Sp}_{x=3} \circ \mathrm{Sp}_{x=2}(\mathbf{x})$
$(0,0)$	$(2,0)$	$(0,0)$	$(2,0)$	$(4,0)$	$(2,0)$
$(1,0)$	$(3,0)$	$(-1,0)$	$(3,0)$	$(3,0)$	$(3,0)$
$(0,1)$	$(2,1)$	$(0,1)$	$(2,1)$	$(4,1)$	$(2,1)$

3. De uitspraak is waar. Volgens de classificatiestelling van isometrieën van S^2 zijn de indirecte isometrieën van S^2 spiegelingen en draaispiegelingen. Dat wil zeggen, ze zijn te schrijven als
$$T = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & R_\varphi \end{pmatrix}$$
ten opzichte van een geschikte keuze van een orthonormale basis in $\mathbb{R}^3$. We werken ten opzichte van deze basis. De transformatie $A(\mathbf{x}) = -\mathbf{x}$ is gegeven door de matrix
$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$
Verder is
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -R_\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R_\pi R_\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R_{\varphi+\pi} \end{pmatrix}$$
een rotatie. Hiermee krijgen we
$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -R_\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & R_\varphi \end{pmatrix} = T$$
zoals beweerd.

4. Kies de namen van de punten zo dat B tussen A en C ligt. Dankzij de cosinusregel weten we dat ZHZ en ZZZ congruentiegevallen in het hyperbolische vlak zijn. Door ZHZ is $\triangle A'AB \cong \triangle B'BA$, en dus $AB' = A'B$ en $\angle AA'B = \angle BB'A$. Door ZZZ is nu $\triangle A'BB' \cong \triangle B'AA'$, en dus $\angle BA'B' = \angle AB'A'$. Door optelling is dus $\angle AA'B' = \angle BB'A'$. We weten dat de hoekensom van een driehoek in het hyperbolische vlak kleiner is dan π. Daardoor is
$$\mathrm{hoekensom}(AA'B'B) = \mathrm{hoekensom}(\triangle AA'B') + \mathrm{hoekensom}(\triangle ABB') < 2\pi.$$
Door $\angle BAA' = \pi/2$, $\angle ABB' = \pi/2$, en $\angle AA'B' = \angle BB'A'$ in te vullen krijgen we $\angle BB'A' < \pi/2$. Op dezelfde manier is $\angle BB'C' < \pi/2$. Door optelling is dus $\angle A'B'C' < \pi$, en daardoor is $A'B'C'$ geen rechte lijn.

5. Laat U de $\mathbb{R}^3$-deelruimte $\mathrm{span}((1,0,0))$ zijn. Dan is $E = (0,0,0) + U$ een $\mathbb{A}^3$-deelruimte van dimensie 1. Laat
$$T(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$
Deze matrix is inverteerbaar ($\det = -1 \neq 0$) en dus is $T(\mathbf{x})$ een affiene transformatie. Merk op dat $(0,0,0) \in E$, $(1,0,0) \in E$, $T((0,0,0)) = (0,0,1) \in T(E)$, en $T((1,0,0)) = (0,1,0) \in T(E)$. Met andere worden bevat $\langle E, T(E) \rangle$ het standaardkader $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$, en spant dus de hele $\mathbb{A}^3$ op. (Opmerking: De dimensiestelling is hier niet van toepassing omdat $E \cap T(E) = \emptyset$.)

6. (a) Ja. Laat $A = P_{\mathbf{a}}$, $B = P_{\mathbf{b}}$, $C = P_{\mathbf{c}}$, $D = P_{\mathbf{d}}$, $T(D) = P_{\mathbf{x}}$. Projectieve transformaties bewaren collineariteit, en AB is dezelfde lijn als $T(A)T(B)$ $(= BA)$. Dus C, D, $T(D)$ liggen op AB, wat betekent dat $\mathbf{c}, \mathbf{d}, \mathbf{x} \in \operatorname{span}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$, dus $\mathbf{c} = c_a\mathbf{a} + c_b\mathbf{b}$, $\mathbf{d} = d_a\mathbf{a} + d_b\mathbf{b}$, $\mathbf{x} = x_a\mathbf{a} + x_b\mathbf{b}$. Projectieve transformaties bewaren de dubbelverhouding, dus

$$\frac{c_b}{c_a}\frac{d_a}{d_b} = (ABCD) = (T(A)T(B)T(C)T(D)) = (BADT(D)) = \frac{d_a}{d_b}\frac{x_b}{x_a}$$

dus

$$\frac{c_b}{c_a} = \frac{x_b}{x_a},$$

wat betekent dat $\mathbf{c}$ en $\mathbf{x}$ veelvouden van elkaar zijn. Met andere woorden zijn $C = P_{\mathbf{c}}$ en $T(D) = P_{\mathbf{x}}$ hetzelfde punt in $\mathbb{P}^2$.

(b) Nee. Laat $A = (1 : -2 : 0), B = (1 : -1 : 0), C = (1 : 1 : 0), D = (1 : 2 : 0), E = (1 : 0 : 1) \in \mathbb{P}^2$, en laat

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{en} \qquad T' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Deze zijn inverteerbare 3×3 matrices, dus T en T' zijn projectieve transformaties $\mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^2$. Nu is

$$T(A) = T'(A) = (-2 : 2 : 0) = (1 : -1 : 0) = B,$$
$$T(B) = T'(B) = (-1 : 2 : 0) = A,$$
$$T(C) = T'(C) = (1 : 2 : 0) = D,$$

maar

$$T(E) = (0 : 2 : 1) \neq (0 : 2 : 2) = T'(E).$$