Tentamen WISB141 Inleiding Meetkunde

woensdag 6 juli 2022 13:30–16:30

1. Laat $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ gedefinieerd zijn als 1,8 pt.

$$d(a,b) = \begin{cases} |a-b|+1 & \text{als } a > 0 \text{ en } b \leq 0 \\ |a-b|+1 & \text{als } b > 0 \text{ en } a \leq 0 \\ |a-b| & \text{in alle andere gevallen.} \end{cases}$$

   Is $(\mathbb{R}, d)$ een metrische ruimte? Bewijs je antwoord.

2. Voor de volgende uitspraak, geef óf een bewijs óf een tegenvoorbeeld*: Als $T(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + \mathbf{v}$ een niet-triviale ($\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$) translatie van het Euclidische vlak $\mathbb{E}^2$ is, die als samenstelling van spiegelingen uit te drukken is als $T = \mathrm{Sp}_{m_1} \circ \mathrm{Sp}_{m_2} = \mathrm{Sp}_{m_3} \circ \mathrm{Sp}_{m_4}$, dan kunnen de lijnen m_1, m_2, m_3, m_4 niet allemaal verschillend zijn. 1,6 pt.

3. Voor de volgende uitspraak, geef óf een bewijs óf een tegenvoorbeeld*: Als T een indirecte isometrie van de bolschil S^2 is, dan is T te schrijven als de samenstelling van $A(\mathbf{x}) = -\mathbf{x}$ met een rotatie. 1,6 pt.

4. Laat ℓ een lijn in het hyperbolische vlak zijn. Laat A', B', C' verschillende punten zijn op dezelfde zijde en gelijke afstand van ℓ, dus $d(A,A') = d(B,B') = d(C,C')$, waar AA', BB', CC' loodrecht op ℓ staan en $A, B, C \in \ell$. Laat zien dat A', B', C' niet collineair zijn. 1,6 pt.

5. Laat E een affiene deelruimte van $\mathbb{A}^3$ zijn met $\dim E = 1$. Laat $T : \mathbb{A}^3 \to \mathbb{A}^3$ een affiene transformatie zijn. Is het mogelijk dat $\langle E, T(E) \rangle = \mathbb{A}^3$? Geef óf een voorbeeld* van zo'n E en T, óf een bewijs dat het niet kan. 1,6 pt.

6. Laat $T : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^2$ een projectieve transformatie zijn waarvoor $T(A) = B$, $T(B) = A$, en $T(C) = D$ voor vier verschillende collineaire punten $A, B, C, D \in \mathbb{P}^2$. 1,8 pt.

   (a) Volgt het dat $T(D) = C$? Bewijs je antwoord.

   (b) Is T uniek bepaald? Met andere worden, als $T' : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^2$ een projectieve transformatie is, en $T'(A) = B$, $T'(B) = A$, $T'(C) = D$, volgt het dat $T'(E) = T(E)$ voor alle $E \in \mathbb{P}^2$? Geef óf een bewijs óf een tegenvoorbeeld*.

---

*En bewijs dat je voorbeeld voldoet aan de voorwaarden.