INLEIDING GROEPEN EN RINGEN 2021–2022

TENTAMEN 27 JUNI 2022, 17:00-20:00 (EXTRA TIJD TOT 20:30)

- Het tentamen bestaat uit vier vragen (die op hun beurt weer bestaan uit deelvragen). Gebruik voor het beantwoorden van elk van de vier vragen een apart vel examenpapier en schrijf op ieder vel je volledige naam en studentnummer. (Let op: de tentamenvragen worden parallel nagekeken, en daarvoor wordt je ingeleverde werk verdeeld over meerdere nakijkers. Als je naam niet op ieder vel staat kan je werk verloren gaan.)
- Het tentamen is "open boek". Dit betekent dat je het boek van Dummit & Foote mag gebruiken bij het tentamen, hetzij een papieren exemplaar, hetzij een digitale kopie op een meegebrachte laptop of tablet (geen telefoon); dit laatste onder volgende strikte voorwaarden:
  - wifi en mobiele data zijn ten allen tijde uitgeschakeld
  - geluid staat op mute
  - zorg ervoor dat voor aanvang van het tentamen alles is klaargezet en het document geopend is
  - je mag niet typen (ook niet om naar een woord zoeken), enkel scrollen
  - surveillanten mogen altijd meekijken naar je scherm
  - eventuele fraude zal worden gemeld bij de examencommissie
  - bij technische problemen (zoals bijv. een lege batterij) met je device zijn de surveillanten niet verantwoordelijk.

  Bij het tentamen mag je ook een printout gebruiken van hoofdstuk 17 en 18 over groepsacties uit het boek van Armstrong (op deze printout mag niets extra geschreven staan, behalve de correctie dat "e(x)=x" moet gelden op de eerste pagina). Bij het tentamen mag je ook je eigen aantekeningen meebrengen en gebruiken. Let op: je mag dit niet digitaal meebrengen en raadplegen; digitaal enkel het boek van Dummit & Foote. Je mag geen andere boeken of bronnen gebruiken, maar wel een rekenmachine.
- Schrijf helder maar bondig. Geef niet enkel het antwoord, maar ook de motivatie. Antwoorden zonder uitleg leveren geen punten op.
- Bij het geven van bewijzen mag je gebruik maken van alle kennis die je hebt opgedaan in de cursus, maar geef een eenduidige verwijzing als je iets gebruikt (bijv. naam van een stelling; verwijzing naar boek met paginanummer). Je mag zonder bewijs gebruik maken van stellingen uit de boeken of het hoorcollege, maar niet uit (zelfs gemaakte) opgaves.
- De surveillanten bij het tentamen zijn docenten van het vak. Bij inhoudelijke vragen kan je hen aanspreken.

Succes!

100pt

Tentamenvragen (English version follows)

Notatie: $\mathbf{R}$ zijn de reële getallen, $\mathbf{Z}$ de gehele getallen, met $N \in \mathbf{Z}$ is $\mathbf{Z}/N := \mathbf{Z}/N\mathbf{Z}$; voor $m \in \mathbf{Z}$ is $\overline{m}$ de notatie voor de corresponderende klasse in $\mathbf{Z}/N$. Je mag gebruiken dat het huidige jaar als volgt ontbindt in priemfactoren: $2022 = 2 \cdot 3 \cdot 337$.

Vraag 1.

10pt (a) Bereken de inverse van het element $\overline{119}$ in de groep $(\mathbf{Z}/2022)^*$ voor vermenigvuldiging, en schrijf het resultaat als $\overline{m}$ met $0 \leq m \leq 2021$.

10pt (b) Bereken de orde van het element $(123)(12)(34)$ in A_4.

10pt (c) Stel dat M een willekeurige inverteerbare matrix is in $\mathrm{GL}_2(\mathbf{R})$ (de groep van inverteerbare 2×2 matrices over de reële getallen voor vermenigvuldiging), en stel dat $N := \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. Bereken de orde van MNM^{-1} in $\mathrm{GL}_2(\mathbf{R})$.

10pt (d) Geef een lijst met alle elementen van de ring $\mathbf{Z}/3[x]$ (de ring van polynomen met coëfficiënten uit de ring $\mathbf{Z}/3$ van gehele getallen modulo 3) die voortbrenger zijn van het hoofdideaal (x).

Vraag 2. Zijn onderstaande beweringen waar of onwaar? Bewijs of weerleg.

10pt (a) $\mathbf{R}[x]/(x^2 + 2)$ is geen lichaam.

10pt (b) Als $\varphi\colon G \to H$ een surjectief groepshomomorfisme is zodat G van orde 2022 is en de orde van H tussen 500 en 1000 ligt (d.w.z., $|G| = 2022$ en $500 < |H| < 1000$), dan moet H van orde 674 zijn (d.w.z. $|H| = 674$).

10pt (c) Stel dat G een groep is, en er bestaat een surjectief groepshomomorfisme $\varphi\colon G \to \mathbf{Z}/2022$. Dan bestaat er een normale ondergroep in G van index 3.

Vraag 3. Geef een voorbeeld van, of laat zien dat zoiets niet kan bestaan:

10pt (a) Een polynoom $f \in \mathbf{R}[x]$ van graad 2 (d.w.z. $\deg(f) = 2$) zodat $\mathbf{R}[x]/(f)$ geen domein is.

10pt (b) Een enkelvoudige groep G (d.w.z. een groep met precies twee normale ondergroepen) van even orde $2n$ voor $n > 1$, die werkt op een verzameling X zodat de actie een baan heeft met precies 2 elementen.

Vraag 4. Stel dat $R = \{f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}\}$ de verzameling is van alle functies van $\mathbf{R}$ naar $\mathbf{R}$. Dit is een commutatieve ring met $1 \neq 0$ voor 'puntsgewijs' optellen en vermenigvuldigen, d.w.z. als $f, g \in R$ dan is $f + g$ de functie met $(f + g)(x) := f(x) + g(x)$, en fg de functie met $(fg)(x) := f(x)g(x)$ voor alle $x \in \mathbf{R}$. Stel dat $A \subseteq \mathbf{R}$ een niet-lege verzameling van reële getallen is, en definieer

$$I_A := \{f \in R\colon f(a) = 0 \text{ voor alle } a \in A\} \subseteq R.$$

4pt (a) Bewijs dat I_A een ideaal is in de ring R.

3pt (b) Voor welke A is I_A een priemideaal?

3pt (c) Bewijs dat R geen Noetherse ring is, d.w.z., bewijs dat er in R een oneindig lange stijgende keten van verschillende idealen bestaat $I_1 \subset I_2 \subset I_3 \ldots$.

Einde van het tentamen

100pt

Exam questions

Notation. $\mathbf{R}$ denotes the real numbers, $\mathbf{Z}$ the integers, for $N \in \mathbf{Z}$ is $\mathbf{Z}/N := \mathbf{Z}/N\mathbf{Z}$, and for $m \in \mathbf{Z}$, $\overline{m}$ denotes the corresponding class in $\mathbf{Z}/N$. You may use that the current year has prime factorisation $2022 = 2 \cdot 3 \cdot 337$.

Question 1.

10pt (a) Compute the multiplicative inverse of $\overline{119}$ in the group $(\mathbf{Z}/2022)^*$ and write the result as $\overline{m}$ with $0 \leq m \leq 2021$.

10pt (b) Compute the order of $(123)(12)(34)$ in A_4.

10pt (c) Let M denote an arbitrary invertible matrix in $\mathrm{GL}_2(\mathbf{R})$ (the group of invertible 2×2 matrices over the real numbers, under multiplication), and let $N := \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. Compute the order of MNM^{-1} in $\mathrm{GL}_2(\mathbf{R})$.

10pt (d) List all elements of the ring $\mathbf{Z}/3[x]$ (the ring of polynomials with coefficients from the ring $\mathbf{Z}/3$ of integers modulo 3) that are generators of the principal ideal (x).

Question 2. Are the following statements true or false? Prove or disprove.

10pt (a) $\mathbf{R}[x]/(x^2 + 2)$ is not a field.

10pt (b) If $\varphi\colon G \to H$ is a surjective group homomorphism, where G has order 2022 and the order of H lies between 500 and 1000 (i.e., $|G| = 2022$ en $500 < |H| < 1000$), then H has to have order 674 (i.e., $|H| = 674$).

10pt (c) Suppose G is a group for which there exists a surjective group homomorphism $\varphi\colon G \to \mathbf{Z}/2022$. Then G contains a normal subgroup of index 3.

Question 3. Give an example of, or show that such a thing cannot exist:

10pt (a) A polynomial $f \in \mathbf{R}[x]$ of degree 2 (i.e., $\deg(f) = 2$) for which $\mathbf{R}[x]/(f)$ is not an integral domain.

10pt (b) A simple group G (i.e., a group having precisely two normal subgroups) of even order $2n$ for $n > 1$, acting on a set X such that the action admits an orbit with exactly 2 elements.

Question 4. Let $R = \{f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}\}$ denote the set of all functions from $\mathbf{R}$ to $\mathbf{R}$. This forms a commutative ring with $1 \neq 0$ for 'pointwise' addition and multiplication, i.e., for $f, g \in R$ we set $f + g$ to be the function satisfying $(f + g)(x) := f(x) + g(x)$, and fg the function satisfying $(fg)(x) := f(x)g(x)$, for all $x \in \mathbf{R}$. For a non-empty subset $A \subseteq \mathbf{R}$ of real numbers, define

$$I_A := \{f \in R\colon f(a) = 0 \text{ for all } a \in A\} \subseteq R.$$

4pt (a) Prove that I_A is an ideal in the ring R.

3pt (b) For which A is I_A a prime ideal?

3pt (c) Prove that R is not Noetherian, i.e., prove that in R there exists an infinitely long increasing chain of distinct ideals $I_1 \subset I_2 \subset I_3 \ldots$.

End of the exam