INLEIDING GROEPEN EN RINGEN 2021–2022

HERTENTAMEN 11 JULI 2022, 14:15-17:15 (EXTRA TIJD TOT 17:45)

- Het tentamen bestaat uit vier vragen (die op hun beurt weer bestaan uit deelvragen). Gebruik voor het beantwoorden van elk van de vier vragen een apart vel examenpapier en schrijf op ieder vel je volledige naam en studentnummer. (Let op: de tentamenvragen worden parallel nagekeken, en daarvoor wordt je ingeleverde werk verdeeld over meerdere nakijkers. Als je naam niet op ieder vel staat kan je werk verloren gaan.)
- Het tentamen is "open boek". Dit betekent dat je het boek van Dummit & Foote mag gebruiken bij het tentamen, hetzij een papieren exemplaar, hetzij een digitale kopie op een meegebrachte laptop of tablet (geen telefoon); dit laatste onder volgende strikte voorwaarden:
  - wifi en mobiele data zijn ten allen tijde uitgeschakeld
  - geluid staat op mute
  - zorg ervoor dat voor aanvang van het tentamen alles is klaargezet en het document geopend is
  - je mag niet typen (ook niet om naar een woord zoeken), enkel scrollen
  - surveillanten mogen altijd meekijken naar je scherm
  - eventuele fraude zal worden gemeld bij de examencommissie
  - bij technische problemen (zoals bijv. een lege batterij) met je device zijn de surveillanten niet verantwoordelijk.

  Bij het tentamen mag je ook een printout gebruiken van hoofdstuk 17 en 18 over groepsacties uit het boek van Armstrong (op deze printout mag niets extra geschreven staan, behalve de correctie dat "e(x)=x" moet gelden op de eerste pagina). Bij het tentamen mag je ook je eigen aantekeningen meebrengen en gebruiken. Let op: je mag dit niet digitaal meebrengen en raadplegen; digitaal enkel het boek van Dummit & Foote. Je mag geen andere boeken of bronnen gebruiken, maar wel een rekenmachine.
- Schrijf helder maar bondig. Geef niet enkel het antwoord, maar ook de motivatie. Antwoorden zonder uitleg leveren geen punten op.
- Bij het geven van bewijzen mag je gebruik maken van alle kennis die je hebt opgedaan in de cursus, maar geef een eenduidige verwijzing als je iets gebruikt (bijv. naam van een stelling; verwijzing naar boek met paginanummer). Je mag zonder bewijs gebruik maken van stellingen uit de boeken of het hoorcollege, maar niet uit (zelfs gemaakte) opgaves.
- De surveillanten bij het tentamen zijn docenten van het vak. Bij inhoudelijke vragen kan je hen aanspreken.

Succes!

100pt

Tentamenvragen (English version follows)

Notatie: $\mathbf{R}$ zijn de reële getallen, $\mathbf{C}$ zijn de complexe getallen, $\mathbf{Z}$ de gehele getallen, met $N \in \mathbf{Z}$ is $\mathbf{Z}/N := \mathbf{Z}/N\mathbf{Z}$; voor $m \in \mathbf{Z}$ is $\overline{m}$ de notatie voor de corresponderende klasse in $\mathbf{Z}/N$. Je mag gebruiken dat het huidige jaar als volgt ontbindt in priemfactoren: $2022 = 2 \cdot 3 \cdot 337$.

Vraag 1.

10pt (a) Bereken de inverse van het element $\overline{551}$ in de groep $(\mathbf{Z}/2022)^*$ voor vermenigvuldiging, en schrijf het resultaat als $\overline{m}$ met $0 \leq m \leq 2021$.

10pt (b) Beschouw de elementen $\sigma_1 = (15)(34)$ en $\sigma_2 = (16)(23)$ in S_6. Bereken een element $\tau \in S_6$, geschreven als product van disjuncte cykels, zodat $\sigma_2 = \tau\sigma_1\tau^{-1}$.

10pt (c) De permutatiegroep S_{2022} werkt door permutatie van de 2022 symbolen $\{1, 2, \ldots, 2022\}$. Wat is de orde van de stabilizator van het symbool 1?

10pt (d) Stel $D_{2022} = \langle r, s \mid r^{1011} = s^2 = e, rsr = s\rangle$ is de diëdergroep van orde 2022. Schrijf het inverse van $r^{1010}s \in D_{2022}$ met hoogstens 3 symbolen (iedere letter, teken en cijfer telt als één symbool).

Vraag 2. Zijn onderstaande beweringen waar of onwaar? Bewijs of weerleg.

10pt (a) $\mathbf{C}[x]/(x^2 + 2)$ is een lichaam.

10pt (b) Stel dat R een commutatieve ring met $1 \neq 0$ is, en I een ideaal in R. Als er een lichaam K bestaat en een injectief ringhomomorfisme $\varphi\colon R/I \to K$, dan is I een priemideaal.

10pt (c) Stel dat G een groep is waarvoor een surjectief groepshomomorfisme $\varphi\colon G \to H$ bestaat naar een groep H van orde 2022. Dan bestaat er een normale ondergroep N in G zodat G/N een element van orde 337 bevat.

Vraag 3. Geef een voorbeeld van, of laat zien dat zoiets niet kan bestaan:

10pt (a) Een niet-commutatieve groep van orde $2p$ voor elk oneven priemgetal p.

10pt (b) Oneindig veel verschillende nuldelers in $\mathrm{M}_3(\mathbf{R})$, de ring van 3×3 matrices over de reële getallen.

Vraag 4. Stel dat $\varphi_1\colon \mathbf{Z}[x] \to \mathbf{Z}[x]/(2)$ en $\varphi_2\colon \mathbf{Z}[x] \to \mathbf{Z}[x]/(x)$ de gebruikelijke ringhomomorfisme zijn modulo de idealen (2) en (x) in $\mathbf{Z}[x]$, en bekijk het ringhomomorfisme

$$\varphi\colon \mathbf{Z}[x] \to \mathbf{Z}[x]/(2) \times \mathbf{Z}[x]/(x)$$

met $\varphi(f) = (\varphi_1(f), \varphi_2(f))$.

2pt (a) Bewijs dat $\ker\varphi$ een hoofdideaal is door een expliciete voortbrenger te geven.

2pt (b) Laat zien dat φ niet surjectief is door een element te geven wat niet in het beeld ligt.

6pt (c) Bewijs dat er een surjectief ringhomomorfisme $\psi\colon \mathbf{Z}[x]/(2) \times \mathbf{Z}[x]/(x) \to \mathbf{Z}/2$ bestaat zodat $\ker\psi = \operatorname{im}\varphi$ (het beeld van φ, ook genoteerd als $\operatorname{im}\varphi = \varphi(\mathbf{Z}[x])$).

Einde van het tentamen

100pt

Exam questions

Notation. $\mathbf{R}$ denotes the real numbers, $\mathbf{C}$ the complex numbers, $\mathbf{Z}$ the integers, for $N \in \mathbf{Z}$ is $\mathbf{Z}/N := \mathbf{Z}/N\mathbf{Z}$, and for $m \in \mathbf{Z}$, $\overline{m}$ denotes the corresponding class in $\mathbf{Z}/N$. You may use that the current year has prime factorisation $2022 = 2 \cdot 3 \cdot 337$.

Question 1.

10pt (a) Compute the multiplicative inverse of $\overline{551}$ in the group $(\mathbf{Z}/2022)^*$ and write the result as $\overline{m}$ with $0 \leq m \leq 2021$.

10pt (b) Consider the elements $\sigma_1 = (15)(34)$ and $\sigma_2 = (16)(23)$ in S_6. Compute an element $\tau \in S_6$, written as product of disjoint cycles, such that $\sigma_2 = \tau\sigma_1\tau^{-1}$.

10pt (c) The symmetric group S_{2022} acts by permuting 2022 symbols $\{1, \dots, 2022\}$. What is the order of the stabiliser of the symbol 1?

10pt (d) Let $D_{2022} = \langle r, s \mid r^{1011} = s^2 = e, rsr = s \rangle$ denote the dihedral group of order 2022. Write the inverse of

$$r^{1010}s \in D_{2022}$$

using at most 3 symbols (where every letter, digit and sign counts as one symbol).

Question 2. Are the following statements true or false? Prove or disprove.

10pt (a) $\mathbf{C}[x]/(x^2 + 2)$ is a field.

10pt (b) Suppose R is a commutative ring with $1 \neq 0$ and I is an ideal in R. If there exists a field K and an injective ring homomorphism $\varphi \colon R/I \to K$, then I is a prime ideal.

10pt (c) Suppose G is a group for which there exists a surjective group homomorphism $\varphi \colon G \to H$ to a group H of order 2022. Then G has a normal subgroup N such that G/N contains an element of order 337.

Question 3. Give an example of, or show that such a thing cannot exist:

10pt (a) A non-commutative group of order $2p$ for any odd prime number p.

10pt (b) Infinitely many distinct zero divisors in $\mathrm{M}_3(\mathbf{R})$, the ring of 3×3 matrices over the real numbers.

Question 4. Let $\varphi_1 \colon \mathbf{Z}[x] \to \mathbf{Z}[x]/(2)$ and $\varphi_2 \colon \mathbf{Z}[x] \to \mathbf{Z}[x]/(x)$ denote the usual ring homomorphisms modulo the ideals (2) and (x) in $\mathbf{Z}[x]$, and consider the ring homomorphism

$$\varphi \colon \mathbf{Z}[x] \to \mathbf{Z}[x]/(2) \times \mathbf{Z}[x]/(x)$$

with $\varphi(f) = (\varphi_1(f), \varphi_2(f))$.

2pt (a) Prove that $\ker\varphi$ is a principal ideal by giving an explicit generator.

2pt (b) Prove that φ is not surjective by giving an element not in the image.

6pt (c) Prove that there exists a surjective ring homomorphism $\psi \colon \mathbf{Z}[x]/(2) \times \mathbf{Z}[x]/(x) \to \mathbf{Z}/2$ for which $\operatorname{im}\varphi = \ker\psi$ (the image of φ, ook denoted $\operatorname{im}\varphi = \varphi(\mathbf{Z}[x])$).

End of the exam