Tentamen Lineaire algebra 1 (WISB107)
Maandag 8 november 2021, 15.15-18.15

Docent: *Barbara van den Berg*

- Schrijf je naam en studentnummer op elk vel.
- Het gebruik van het dictaat en collegeaantekeningen is NIET toegestaan.Je mag één A4 dat aan één kant beschreven is (een spiekbrief) bij je tentamen gebruiken. De spiekbrief mag getypt zijn. Het gebruik van telefoons, computers, rekenmachines of andere bronnen is NIET toegestaan.
- Geef niet alleen antwoorden, maar laat bij elke (deel)opgave duidelijk zien hoe je aan je antwoorden komt en bewijs je beweringen.
- Je kunt de opgaven in willekeurige volgorde maken. Ook als je antwoord niet volledig is, kun je er punten voor krijgen. Als je een onderdeel van een opgave niet kunt bewijzen, mag je dat resultaat in het vervolg wel gebruiken.
- Het tentamen heeft vijf opgaven. De verdeling van de punten is als volgt:
  - opgave 1: 10 punten
  - opgave 2: 25 punten
  - opgave 3: 35 punten
  - opgave 4: 15 punten
  - opgave 5: 15 punten

Opgave 1

(*10 punten*) Schrijf het complexe getal $(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i)^{-6}$ in de vorm $a+bi$, met $a,b\in\mathbb{R}$. Geef in het complexe vlak aan waar de getallen $(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i)^{-6}$ en $-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$ liggen.

Opgave 2

(*25 punten*)

Gegeven zijn de vectoren $\mathbf{a}=(1,1,0)^t$, $\mathbf{b}=(2,1,1)^t$ en $\mathbf{c}=(-1,3,2)^t$.

(a). (*5 punten*) Laat met behulp van de theorie van determinanten zien dat $\mathbf{a},\mathbf{b}$ en $\mathbf{c}$ onafhankelijke vectoren zijn.

(b). (*10 punten*) Bepaal een vergelijking voor het vlak door de eindpunten van $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$.

(c). (*10 punten*) Bereken de afstand van dit vlak tot de oorsprong.

Opgave 3

(*35 punten*) Gegeven zijn de drie vectoren

$$\mathbf{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \mathbf{v_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ en } \mathbf{v_3} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

Laat V de lineaire deelruimte zijn van $\mathbb{R}^4$ gegeven door $V = \mathrm{Span}(\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3})$.

(a). (*10 punten*) Bepaal een basis voor V.

(b). (*5 punten*) Wat is de dimensie van V?

Laat A de matrix zijn met kolommen $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3}$.

(c). (*10 punten*) Bepaal een basis voor de nulruimte van A.

Laat $a \in \mathbb{R}$. We definiëren

$$\mathbf{u_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ a \end{pmatrix} \text{ en } \mathbf{u_2} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

en laat U de lineaire deelruimte zijn van $\mathbb{R}^4$ gegeven door $U = \mathrm{Span}(\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2})$.

(d). (*10 punten*) Bepaal voor iedere $a \in \mathbb{R}$ de dimensie van $U \cap V$, en geef een basis van $U \cap V$ als $\dim(U \cap V) > 0$.

Opgave 4

(*15 punten*)

Zij A en B een tweetal $n \times n$-matrices. De matrices A en B heten geconjungeerd als er een inverteerbare $n \times n$-matrix P bestaat zodat

$$P^{-1}AP = B.$$

Neem in deze opgave aan dat A en B geconjungeerd zijn. Bewijs de volgende twee uitspraken:

(a). (*10 punten*) $\det(A) = \det(B)$.

(b). (*5 punten*) A is inverteerbaar dan en slechts dan als B inverteerbaar is.

NB: Zoals bovenaan dit tentamen staat aangegven mag je bij het bewijs van (b) gebruik maken van het resultaat van (a), ook als je hier geen bewijs voor hebt gegeven.

Opgave 5

(*15 punten*)

Zij A en B een tweetal $n \times n$-matrices met de eigenschap dat $AB = 0$ (de $n \times n$-nulmatrix).

Bewijs dat $\mathrm{rang}(A) + \mathrm{rang}(B) \leq n$. Hint: Wat kan je zeggen over de nulruimte van A?