Hertentamen Lineaire algebra 1 (WISB107)
Woensdag 22 december 2021, 17.00-20.00

Docent: *Barbara van den Berg*

- **SCHRIJF IEDERE OPGAVE OP EEN APART VEL.**
- **Schrijf je naam en studentnummer op elk vel.**
- **Je mag één A4 dat aan één kant beschreven is bij je tentamen gebruiken. Het gebruik van het dictaat, collegeaantekeningen, telefoons, computers, rekenmachines of andere bronnen is NIET toegestaan.**
- **Geef niet alleen antwoorden, maar laat bij elke (deel)opgave duidelijk zien hoe je aan je antwoorden komt en bewijs je beweringen.**
- **Je kunt de opgaven in willekeurige volgorde maken. Ook als je antwoord niet volledig is, kun je er punten voor krijgen. Als je een onderdeel van een opgave niet kunt bewijzen, mag je dat resultaat in het vervolg wel gebruiken.**
- **Het tentamen heeft vijf opgaven. De verdeling van de punten is als volgt:**
  - **opgave 1: 10 punten**
  - **opgave 2: 20 punten**
  - **opgave 3: 30 punten**
  - **opgave 4: 30 punten**
  - **opgave 5: 10 punten**

Opgave 1 (NIEUW VEL PAPIER)

(*10 punten*) Vind alle $z \in \mathbb{C}$ die voldoen aan de volgende vergelijking en geef een plaatje van de oplossingen in het complexe vlak:

$$z^2\overline{z} = z.$$

Opgave 2 (NIEUW VEL PAPIER)

We bekijken de volgende twee lijnen l en m in de $\mathbb{R}^3$. De lijn l bestaat uit alle punten die voldoen aan de twee vergelijkingen $x_3 = x_2 + 2$ en $x_1 = x_3 - x_2 - 1$ en de lijn m wordt gegeven door de parametrisatie $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(a). (*10 punten*) Ga na of de lijnen l en m elkaar snijden, kruisen of parallel aan elkaar lopen.

(b). (*10 punten*) Bereken de afstand tussen l en m.

Opgave 3 (NIEUW VEL PAPIER)

Bekijk voor iedere $a \in \mathbb{R}$ het stelsel vergelijkingen:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= -a + 1 \\ x_2 + 4x_3 &= -a - 1 \\ 5x_1 + 6x_2 + ax_3 &= 13 \end{aligned}$$

(a). (*8 punten*) Bepaal voor iedere waarde van a of het stelsel geen, precies één, of oneindig veel oplossingen heeft.

(b). (*4 punten*) Bepaal voor $a = 0$ de oplossingsverzameling met behulp van de methode van Gauss (Jordan).

(c). (*2 punten*) Voor welke waarden van a kun je de oplossingsverzameling ook vinden door het inverteren van de coëfficiëntenmatrix van het stelsel vergelijkingen?

(d). (*8 punten*) Controleer je antwoord voor $a = 0$ uit onderdeel (*b*) door de oplossing te vinden met behulp van het inverteren van de coëfficiëntenmatrix van het stelsel.

(e). (*8 punten*) Controleer nog eens de eerste coëfficiënt (dus x_1) van je antwoord uit (*b*) door x_1 te geven met behulp van de regel van Cramer.

Opgave 4 (NIEUW VEL PAPIER)

De volgende beweringen zijn waar of onwaar. Bewijs of weerleg de beweringen:

(a). (*7,5 punten*) Als A een $m \times n$ matrix is met $m < n$ dan bestaat er een niet-triviale relatie tussen de kolomvectoren van A.

(b). (*7,5 punten*) Als A en B twee $n \times n$-matrices zijn zodat $AB = 0$ dan geldt voor de nulruimte van A en B dat $\dim(\text{Nul(B)}) \leq \dim(\text{Nul(A)})$.

(c). (*7,5 punten*) Er geldt $\dim(\text{span}(\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3}, \mathbf{v_4})) = \mathbf{3}$, met:

$$\mathbf{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \mathbf{v_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \mathbf{v_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ en } \mathbf{v_4} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

(d). (*7,5 punten*) Als A en B matrices zijn zodat AB is gedefinieerd, dan geldt

$$\text{rang}(AB) = \text{rang}(A)\text{rang}(B).$$

Opgave 5 (NIEUW VEL PAPIER)

(*10 punten*)

Bereken de volgende determinant door handig gebruik te maken van stellingen:

$$\begin{vmatrix} 17358 & 17458 & 17558 \\ 28469 & 28569 & 28669 \\ 11778 & 11978 & 11978 \end{vmatrix}.$$