WISB107 Infi 1 tentamen donderdag 11 nov 2021, 11:30 – 14:30

Aanwijzingen

- Geef altijd een duidelijke uitwerking met voldoende tekst-uitleg. Alleen een antwoord zonder motivatie is altijd fout, en alleen formules meestal ook.
- Werk rustig, netjes en duidelijk.
- Zorg dat je uitwerking maar één interpretatie toelaat.
- Je kunt alle (deel)vragen onafhankelijk van elkaar maken, ook als een eerdere (deel)vraag niet gelukt is.
- Alle informatie op dit opgavenblad mag bij alle (deel)opgaven gebruikt worden.
- Notatie: met log wordt de natuurlijke logaritme met grondtal e bedoeld.
- Totaal 34 punten.

Normering

100% Uitwerking is correct, efficiënt en getuigt van een goed begrip van de theorie. Het is helder opgeschreven met voldoende toelichting. Een onbelangrijk rekenfoutje kan misschien door de vingers gezien worden.

75% Grote lijn begrepen, maar technische vaardigheid schiet tekort;
signaleert falende *sanity checks* maar is niet in staat de problemen op te lossen;
maakt meerdere fouten (al dan niet door slordigheid);
geeft wel enige uitleg maar niet voldoende;
gebruikt verwerpelijke notaties.

50% Weet ongeveer wat te doen maar lijdt aan gebrek aan vaardigheid en/of inzicht;
mist belangrijke gevalsonderscheidingen of uitzonderingen etc.;
herkent evident foute tussenresultaten niet;
toont onvoldoende vaardigheid/controle/zelfreflectie.
Een combinatie van meerdere bij 75% genoemde tekortkomingen kan ook leiden tot deze normering.

25% Aardig beginnetje maar het levert niet echt wat op, of: een combinatie van meerdere bij 50% genoemde tekortkomingen.

0% Geen idee wat te doen, of: geeft alleen formules zonder uitleg en de opgave vereiste meer dan alleen simpel rekenwerk.

Opmerking: indien *ernstige* fouten gemaakt worden op het gebied van vwo-voorkennis (kettingregel vergeten, slechte beheersing gonio, …) kan de normering een punt lager uitvallen dan anders het geval zou zijn geweest.

1. Geef een benadering van $\sqrt{2}$ middels een 3e orde Taylorveelterm van $\sqrt{1+x}$ in steunpunt 0. 4 pt.

Uitwerking: We gebruiken de Taylorformule voor 3e orde en steunpunt 0:

$$P_3(x) = f(0) + f'(0)x + \tfrac{1}{2}f''(0)x^2 + \tfrac{1}{6}f'''(0)x^3,$$

waarvan de functie f en z'n afgeleiden in 0 hieronder getabelleerd staan:

$$\begin{aligned} f(x) &= (1+x)^{1/2}, & f(0) &= 1 \\ f'(x) &= \tfrac{1}{2}(1+x)^{-1/2}, & f'(0) &= \tfrac{1}{2} \\ f''(x) &= -\tfrac{1}{4}(1+x)^{-3/2}, & f''(0) &= -\tfrac{1}{4} \\ f'''(x) &= \tfrac{3}{8}(1+x)^{-5/2}, & f'''(0) &= \tfrac{3}{8} \end{aligned}$$

Wanneer we dit invullen krijgen we:

$$P_3(x) = 1 + \tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{8}x^2 + \tfrac{1}{16}x^3.$$

We benaderen $\sqrt{2}$ door $x = 1$ te kiezen:

$$\sqrt{2} \approx P_3(1) = 1 + \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{16} = \tfrac{23}{16}.$$

Opmerking: sommige studenten zitten te pitten en kiezen $x = 2$, dit geeft een duidelijk fout antwoord $> 3/2$. Verder komen de breuken zo netjes uit dat we hier wel vereenvoudiging van het antwoord verwachten.

2. Bepaal $\lim_{x\to\infty} \dfrac{7x + \sin x}{6x + \log x}$. Geef een volledige argumentatie! 4 pt.

Uitwerking: Zowel teller als noemer van de breuk gaan naar ∞ als $x \to \infty$. Als we echter teller en noemer allebei door x delen, krijgen we

$$\frac{7x + \sin x}{6x + \log x} = \frac{7 + \frac{\sin x}{x}}{6 + \frac{\log x}{x}}.$$

Merk op dat $-1 \le \sin x \le 1$; voor $x > 1$ geldt dus dat

$$\frac{-1}{x} \le \frac{\sin x}{x} \le \frac{1}{x}.$$

Aangezien $\lim_{x\to\infty} \frac{\pm 1}{x} = 0$, volgt uit de insluitstelling dat ook $\lim_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$.

Daarnaast hebben we $\lim_{x\to\infty} \frac{\log x}{x} = 0$; dit is een standaardlimiet (eventueel mag je die ook “bewijzen” door l'Hopital toe te passen).

Wanneer we deze deelresultaten samen met de rekenregels voor limieten toepassen, vinden we

$$\lim_{x\to\infty} \frac{7x + \sin x}{6x + \log x} = \lim_{x\to\infty} \frac{7 + \frac{\sin x}{x}}{6 + \frac{\log x}{x}} = \frac{7}{6}.$$

Opmerking: Direct toepassen van l'Hopital werkt niet, want hoe vaak je teller en noemer ook differentieert, de limiet van hun breuk bestaat niet. Daardoor is de stelling niet bruikbaar.

3. We herinneren aan de hyperbolische functies $\sinh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ en $\cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$. 2 pt.
   Druk $\sinh(2x)$ uit in $\sinh x$ en $\cosh x$.

   Uitwerking: Volgens de definitie geldt $\sinh(2x) = \frac{1}{2}(e^{2x} - e^{-2x})$. Tussen de haakjes herkennen we het verschil van twee kwadraten, d.w.z. een merkwaardig product: $e^{2x} - e^{-2x} = (e^x - e^{-x})(e^x + e^{-x})$. Zodoende krijgen we

   $$\sinh(2x) = \tfrac{1}{2}(2\sinh x)(2\cosh x) = 2\sinh x \cosh x.$$

4. De functie $f\colon x \mapsto \sqrt{x + \sqrt{x}}$ is bijectief.
   a. Bepaal het functievoorschrift van de inverse functie f^{inv}. 4 pt.

   Uitwerking: Het domein van f is $[0, \infty)$ dus we hoeven geen rekening te houden met negatieve x. We schrijven $y = \sqrt{x + \sqrt{x}}$ en gaan x uitdrukken als functie van y. Kwadrateren geeft

   $$y^2 = x + \sqrt{x},$$

   dit herschrijven we als $y^2 - x = \sqrt{x}$ waarna we nogmaals kwadrateren:

   $$y^4 - 2xy^2 + x^2 = x.$$

   We herkennen hierin een kwadratische vergelijking in x:

   $$x^2 - x(2y^2 + 1) + y^4 = 0,$$

   met oplossingen volgens de *abc*-formule:

   $$x = y^2 + \tfrac{1}{2} \pm \sqrt{y^2 + \tfrac{1}{4}}.$$

   Nu is de vraag welk van de twee tekens we moeten nemen. Dit is lastig omdat beide varianten een $x > 0$ opleveren. Een simpele oplossing is om $x = 1$ te kiezen en de proef op de som te nemen: $f(1) = \sqrt{2}$, en met $y = \sqrt{2}$ vinden we

   $$x = 2 + \tfrac{1}{2} \pm \sqrt{2 + \tfrac{1}{4}} = \tfrac{5}{2} \pm \tfrac{3}{2}.$$

   Aangezien we eisen dat dit wederom $x = 1$ oplevert, moeten we blijkbaar het $-$-teken kiezen. Het functievoorschrift voor de inverse is dus

   $$f^{\text{inv}}(x) = x^2 + \tfrac{1}{2} - \sqrt{x^2 + \tfrac{1}{4}}.$$

   Opmerking 1: Het verwisselen van de variabelen in de laatste stap is geen vereiste, wel moet het juiste voorschrift met het juiste teken gevonden worden!

   Opmerking 2: De intuïtie achter het $-$-teken is als volgt: de grafiek van $y = f(x)$ ligt boven *de grafiek van $y = \sqrt{x}$, dus de grafiek van $y = f^{\text{inv}}(x)$ moet* onder *die van $y = x^2$ liggen.*

b. Wat is het domein van de inverse functie? 2 pt.

Uitwerking: We hebben $f(0) = 0$ en $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$. Dus f heeft als bereik $\mathbb{R}_{\geq 0} = [0, \infty)$, en dit is tevens het domein van de inverse.

Opm.: Het functievoorschrift van de inverse functie is wel geldig op heel $\mathbb{R}$, maar dat maakt $\mathbb{R}$ nog niet tot domein van f^{inv}.

5. Evalueer $\displaystyle\int \log(1 + x^2)\,\mathrm{d}x$. 4 pt.

Uitwerking: We doen deze partieel (met een denkbeeldige factor 1 voor de integrand):

$$\int \log(1 + x^2)\,\mathrm{d}x = x\log(1 + x^2) - \int \frac{2x^2}{1 + x^2}\,\mathrm{d}x.$$

De nieuwe integraal die we hebben gekregen is rationaal:

$$\int \frac{2x^2}{1 + x^2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{2 + 2x^2}{1 + x^2} - \frac{2}{1 + x^2}\,\mathrm{d}x = \int 2\,\mathrm{d}x - 2\int \frac{1}{1 + x^2}\,\mathrm{d}x = 2x - 2\arctan x.$$

We concluderen dat

$$\int \log(1 + x^2)\,\mathrm{d}x = x\log(1 + x^2) - 2x + 2\arctan x + c.$$

Opm.: vergeten van de integratieconstante is een onbelangrijk detail, maar consequent vergeten $\mathrm{d}x$ op te schrijven is onzinnotatie.

6. Evalueer $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \frac{\mathrm{e}^{4x}}{1 + \mathrm{e}^{2x}}\,\mathrm{d}x$. 4 pt.

Uitwerking: Dit gaat goed met substitutie $u = \mathrm{e}^{2x}$, $\mathrm{d}u = 2\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x$. Het integratie-interval $-\infty < x < 0$ verandert daardoor in $0 < u < 1$. In de nieuwe variabele hebben we dus de integraal

$$\tfrac{1}{2}\int_0^1 \frac{u}{1 + u}\,\mathrm{d}u = \tfrac{1}{2}\int_0^1 1 - \frac{1}{1 + u}\,\mathrm{d}u = \tfrac{1}{2}\left(u - \log|1 + u|\Big|_0^1\right) = \frac{1 - \log 2}{2}.$$

Opm.: je kunt ook na integratie terugsubstitueren en de oude grenzen $-\infty$, 0 gebruiken.

7. Los het beginwaardeprobleem $xy' = 2y + x^3\cos x$ met beginwaarde $y(\pi/4) = \dfrac{\pi^2}{8\sqrt{2}}$ op. 4 pt.

Uitwerking: We lossen eerst de homogene vergelijking $xy' - 2y = 0$ op, hetzij door te scheiden, hetzij door direct in te zien dat $y = cx^2$ voldoet (met integratieconstante c). Vervolgens passen we variatie van constante toe (of een andere techniek) om de inhomogene vergelijking op te lossen. Vatten we c op als functie van x, dan vinden we

$$y' = c'x^2 + 2cx,$$

zodat

$$xy' - 2y = c'x^3 + 2cx^2 - 2cx^2 = c'x^3.$$

Om aan de inhomogene dv te voldoen eisen we dat

$$c'x^3 = x^3 \cos x$$

waaruit volgt dat $c' = \cos x$ en dus

$$c = \sin x + k,$$

met integratieconstante k. De volledige oplossing van de dv is dus

$$y = x^2(k + \sin x).$$

De beginwaarde invullen geeft:

$$y(\pi/4) = \tfrac{\pi^2}{16}(k + \tfrac{1}{2}\sqrt{2}) = \tfrac{\pi^2}{8\sqrt{2}}.$$

Dit is een gewone lineaire vergelijking in k met als enige oplossing $k = \frac{1}{2}\sqrt{2}$. De oplossing van het beginwaardeprobleem is dus

$$y = x^2(\tfrac{1}{2}\sqrt{2} + \sin x).$$

8. We herinneren aan de goniometrische verdubbelingsformules $\sin(2\alpha) = 2\sin\alpha\cos\alpha$ en $\cos(2\alpha) = 2\cos^2\alpha - 1$.

   a. Leid uit de verdubbelingsformules af dat $\tan\frac{x}{2} = \dfrac{\sin x}{1+\cos x}$. 3 pt.

   Uitwerking: We nemen de verdubbelingsformule met $\alpha = \frac{x}{2}$. Dit geeft ons $\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$ en $1 + \cos x = 2\cos^2\frac{x}{2}$. De deling geeft

   $$\frac{\sin x}{1+\cos x} = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{2\cos^2\frac{x}{2}} = \frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}} = \tan\tfrac{x}{2},$$

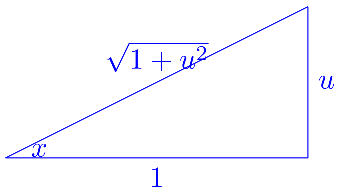
   wat te bewijzen was.

   b. Toon aan dat $\arctan u = 2\arctan\dfrac{u}{1+\sqrt{1+u^2}}$. 3 pt.

   Uitwerking: We substitueren $u = \tan x$; deze substitutie geeft een bijectie tussen $u \in \mathbb{R}$ en $x \in (-\pi/2, \pi/2)$. We merken op dat tevens geldt

   $$\arctan u = x = 2\arctan\tan\tfrac{x}{2}. \qquad (1)$$

   We zullen de rechthoekige driehoek hieronder gebruiken met hoek x, overstaande zijde u, aanliggende zijde 1 en de Stelling van Pythagoras toegepast voor de schuine zijde.



Hiermee kunnen we $\sin x$ en $\cos x$ uitdrukken in u:

$$\sin x = \sin \arctan u = \frac{u}{\sqrt{1+u^2}},$$
$$\cos x = \cos \arctan u = \frac{1}{\sqrt{1+u^2}},$$

en dus

$$\frac{\sin x}{1+\cos x} = \frac{u/\sqrt{1+u^2}}{1 + 1/\sqrt{1+u^2}} = \frac{u}{1+\sqrt{1+u^2}}. \tag{2}$$

Uit opvolgend vergelijking (1), onderdeel (**a**), en vergelijking (2) volgt nu:

$$\begin{aligned} \arctan u &= 2 \arctan \tan \tfrac{x}{2} \\ &= 2 \arctan \frac{\sin x}{1+\cos x} \\ &= 2 \arctan \frac{u}{1+\sqrt{1+u^2}}, \end{aligned}$$

wat te bewijzen was.

c. BONUSVRAAG (1 bonuspunt): Bereken $\arctan(\sqrt{2}-1)$.

Uitwerking: Bedenk

$$\sqrt{2}-1 = \frac{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}{\sqrt{2}+1} = \frac{1}{1+\sqrt{2}}.$$

We kunnen dus het vorige onderdeel toepassen met $u = 1$, immers:

$$\frac{\pi}{4} = \arctan 1 = 2 \arctan \frac{1}{1+\sqrt{2}},$$

zodat

$$\arctan(\sqrt{2}-1) = \frac{\pi}{8}.$$