WISB107 Infi 1 hertentamen di 21 dec 2021, 17:00 – 20:00

Aanwijzingen

- Geef altijd een duidelijke uitwerking met voldoende tekst-uitleg. Alleen een antwoord zonder motivatie is altijd fout, en alleen formules meestal ook.
- Werk rustig, netjes en duidelijk.
- Zorg dat je uitwerking maar één interpretatie toelaat.
- Je kunt alle (deel)vragen onafhankelijk van elkaar maken, ook als een eerdere (deel)vraag niet gelukt is.
- Alle informatie op dit opgavenblad mag bij alle (deel)opgaven gebruikt worden.
- Notatie: met log wordt de natuurlijke logaritme met grondtal e bedoeld.
- Totaal 32 punten.

Normering

100% Uitwerking is correct, efficiënt en getuigt van een goed begrip van de theorie. Het is helder opgeschreven met voldoende toelichting. Een onbelangrijk rekenfoutje kan misschien door de vingers gezien worden.

75% Grote lijn begrepen, maar technische vaardigheid schiet tekort;
signaleert falende *sanity checks* maar is niet in staat de problemen op te lossen;
maakt meerdere fouten (al dan niet door slordigheid);
geeft wel enige uitleg maar niet voldoende;
gebruikt verwerpelijke notaties.

50% Weet ongeveer wat te doen maar lijdt aan gebrek aan vaardigheid en/of inzicht;
mist belangrijke gevalsonderscheidingen of uitzonderingen etc.;
herkent evident foute tussenresultaten niet;
toont onvoldoende vaardigheid/controle/zelfreflectie.
Een combinatie van meerdere bij 75% genoemde tekortkomingen kan ook leiden tot deze normering.

25% Aardig beginnetje maar het levert niet echt wat op, of: een combinatie van meerdere bij 50% genoemde tekortkomingen.

0% Geen idee wat te doen, of: geeft alleen formules zonder uitleg en de opgave vereiste meer dan alleen simpel rekenwerk.

Opmerking: indien *ernstige* fouten gemaakt worden op het gebied van vwo-voorkennis (kettingregel vergeten, slechte beheersing gonio, ...) kan de normering een punt lager uitvallen dan anders het geval zou zijn geweest.

1. Voor welke x heeft de grafiek van $y = x^2 + \frac{1}{9}(4-6x)^{3/2} + 8$ een horizontale raaklijn? 4 pt.

Uitwerking: Er is een horizontale raaklijn als $y' = 0$ dus we differentiëren:

$$y'(x) = 2x - \sqrt{4-6x}.$$

We zoeken vervolgens x zodat $2x = \sqrt{4-6x}$. Deze vergelijking lossen we op door kwadrateren:

$$4x^2 = 4 - 6x,$$

maar we moeten wel opletten dat $4 - 6x \geq 0$ en $2x \geq 0$ vanwege de wortel. De kwadratische vergelijking heeft oplossingen $x = -2$ en $x = \frac{1}{2}$ (te vinden door *abc*-formule, kwadraat afsplitsen, factoriseren of gokken). Echter, $x = -2$ voldoet niet aan de eis $x \geq 0$ en valt af. De oplossing $x = \frac{1}{2}$ is de enige die wel een horizontale raaklijn geeft.

Ik had gewaarschuwd dat ik jullie veel zou plagen met kwadraten van wortels. . . .

2. Bepaal $\lim_{x \to 0} \sin(4x)\mathrm{e}^{\cos(9/x)}$. Geef een goede argumentatie! 4 pt.

Uitwerking: Merk op dat

$$-1 \leq \cos\tfrac{9}{x} \leq 1$$

en dus

$$\mathrm{e}^{-1} \leq \mathrm{e}^{\cos 9/x} \leq \mathrm{e}.$$

We kunnen daarom de functie $f(x) = \sin(4x)\mathrm{e}^{\cos 9/x}$ insluiten tussen de functies $g(x) = \mathrm{e}\sin(4x)$ en $h(x) = -g(x)$. Op heel $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ geldt er dat

$$h(x) \leq f(x) \leq g(x).$$

(Terzijde: het geldt voor alle $x \neq 0$ maar het enige dat we nodig hebben is dat het geldt in een gebied aan weerszijden van $x = 0$.) Bovendien geldt er dat

$$\lim_{x \to 0} g(x) = \lim_{x \to 0} h(x) = 0.$$

Volgens de insluitstelling geldt er dan ook dat

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 0.$$

Sommige studenten sluiten f in als $\mathrm{e}^{-1}\sin(4x) \leq f(x) \leq \mathrm{e}\sin(4x)$, maar dit is alleen correct als $x > 0$. Voor $x < 0$ zou je juist $-\mathrm{e}\sin(4x) \leq f(x) \leq -\mathrm{e}^{-1}\sin(4x)$ krijgen. Dit heb ik door de vingers gezien; de hoofdzaak was dat je inzag dat de insluitstelling gebruikt kon worden.

3. Bepaal de derde orde Taylorveelterm van $f(x) = \sin(\sin(x))$ in steunpunt 0. 4 pt.

Uitwerking: Dit kan lang of kort en je kiest liefst voor kort ;-).

Kort: gebruik de substitutie-methode. We weten al dat de derde-orde Taylorveelterm $S_3(x)$ van $\sin x$ met steunpunt 0 gelijk is aan $S_3(x) = x - \frac{1}{3}x^3$, en dat $\sin 0 = 0$. Het steunpunt blijft dus behouden en we kunnen de derde orde benadering T_3 van $\sin(\sin x)$ vinden door:

$$\begin{aligned} T_3(x) &= S_3(S_3(x)) \\ &= (x - \tfrac{1}{6}x^3) - \tfrac{1}{6}(x - \tfrac{1}{6}x^3)^3 \\ &= x - \tfrac{1}{6}x^3 - \tfrac{1}{6}(x^3 + \text{hogere orde termen}) \\ &= x - \tfrac{1}{3}x^3. \end{aligned}$$

De hogere orde termen gooien we weg omdat we slechts een derde orde benadering zoeken, d.w.z. een veelterm van graad 3.

Lang: hardcore de drie afgeleides vinden. Als het goed is vind je

$$f'''(x) = -\cos(\sin x)\cos^3 x + 3\sin(\sin x)\cos x \sin x - \cos(\sin x)\cos x,$$

en dan $f'''(0) = -2$. De rest van de lange uitwerking laat ik achterwege.

4. Zij $f(x) = (1 + \sin x)^x$. Bepaal $f'(\pi/2)$ (let op, de afgeleide dus). 4 pt.

Uitwerking: Dit vraagt om logaritmisch differentiëren:

$$f'(x) = f(x)\,(\log f(x))'.$$

In dit geval hebben we

$$\log f(x) = x\log(1 + \sin x)$$

zodat

$$(\log f(x))' = \log(1 + \sin x) + \frac{x\cos x}{1 + \sin x}.$$

We nemen $x = \frac{\pi}{2}$ en vinden $f(\frac{\pi}{2}) = 2^{\pi/2}$, $\left(\log f(\frac{\pi}{2})\right)' = \log 2$, dus

$$f'(\tfrac{\pi}{2}) = 2^{\pi/2}\log 2.$$

5. Bereken $\displaystyle\int_0^5 \frac{x}{\sqrt{1+3x}}\,dx$. 4 pt.

Uitwerking: Dit kan op verschillende manieren, hier zijn er een paar.

Partieel: er geldt $\left(\sqrt{1+3x}\right)' = \frac{3}{2}\frac{1}{\sqrt{1+3x}}$ en dus

$$\begin{aligned}\int_0^5 \frac{x}{\sqrt{1+3x}}\mathrm{d}x &= \tfrac{2}{3}x\sqrt{1+3x}\Big|_0^5 - \tfrac{2}{3}\int_0^5 \sqrt{1+3x}\,\mathrm{d}x \\ &= \tfrac{2}{3}x\sqrt{1+3x} - \tfrac{4}{27}(1+3x)^{3/2}\Big|_0^5 \\ &= \tfrac{10}{3}\cdot 4 - \tfrac{4}{27}\cdot 4^3 + \tfrac{4}{27} \\ &= 4(\tfrac{10}{3} - \tfrac{63}{27}) = 4.\end{aligned}$$

Substitutie met $u = \sqrt{1+3x}$: dit geeft

$$\int_0^5 \frac{x}{\sqrt{1+3x}}\mathrm{d}x = \tfrac{2}{9}\int_1^4 (u^2-1)\,\mathrm{d}u = \tfrac{2}{27}(u^3-3u)\Big|_1^4 = 4.$$

Substitutie kan ook met $u = 1+3x$, of je kunt aan de slag met "creatief nietsdoen" in de gedaante

$$\frac{x}{\sqrt{1+3x}} = \frac{x\sqrt{1+3x}}{1+3x} = \tfrac{1}{3}\left(\sqrt{1+3x} - \frac{1}{\sqrt{1+3x}}\right).$$

Volop mogelijkheden dus!

6. Bereken $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\arctan\frac{1}{x}}{x^2}\,\mathrm{d}x$, of laat zien dat deze divergent is. 4 pt.

Uitwerking: *Deze integraal kwam voorbij in het infi-2 hoorcollege, waarbij ik opmerkte dat het een goede infi-1 oefening was om dit na te rekenen. Wie dat gedaan heeft werd beloond!*

De substitutie $u = x^{-1}$ geeft hier een arctangensintegraal die we partieel te lijf gaan:

$$\begin{aligned}\int x^{-2}\arctan x^{-1}\mathrm{d}x &= -\int \arctan u\,\mathrm{d}u \\ &= -u\arctan u + \int \frac{u}{1+u^2}\,\mathrm{d}u \\ &= -u\arctan u + \tfrac{1}{2}\log(1+u^2).\end{aligned}$$

Terugsubstitutie en gebruik van de grenzen geeft nu

$$\int_1^\infty \frac{\arctan\frac{1}{x}}{x^2}\,\mathrm{d}x = -x^{-1}\arctan x^{-1} + \tfrac{1}{2}\log(1+x^{-2})\Big|_1^\infty = \frac{\pi}{4} - \tfrac{1}{2}\log 2.$$

Bij het evalueren hebben we (naast het bekende feit dat $\arctan 1 = \frac{\pi}{4}$) de volgende limieten gebruikt:

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to\infty}\arctan x = \tfrac{\pi}{2}, \text{ waaruit volgt} \\ &\lim_{x\to\infty} x^{-1}\arctan x = 0, \text{ en verder} \\ &\lim_{x\to\infty}\log(1+x^{-2}) = \log 1 = 0.\end{aligned}$$

Je kunt deze integraal ook oplossen met partieel integreren, maar dan loop je op tegen een integrand $\frac{1}{x(x^2+1)}$ die je moet zien te breuksplitsen. Dat kan wel maar is niet behandeld voor noemers van graad 3 en hoger.

7. Los het beginwaardeprobleem $y' + y = \cos(\mathrm{e}^x)$ met beginwaarde $y(0) = 0$ op. 4 pt.

Uitwerking: De d.v. is inhomogeen en de bijbehorende homogene vergelijking $y' + y = 0$ heeft natuurlijk als oplossing $y = c\mathrm{e}^{-x}$ met c integratieconstante. Om dit te vinden kun je het hele dictaatriedeltje afdraaien maar die tijd kun je je beter besparen! Vervolgens passen we de techniek van variatie van constante toe ($c = c(x)$), dit geeft:

$$y' + y = c'\mathrm{e}^{-x}.$$

Om aan de inhomogene vergelijking te voldoen eisen we dat

$$c'\mathrm{e}^{-x} = \cos \mathrm{e}^x.$$

Dit leidt tot

$$c = \int \mathrm{e}^x \cos \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x = \sin \mathrm{e}^x + k,$$

waarin k een nieuwe integratieconstante. De algemene oplossing van de inhomogene d.v. is dus

$$y = (\sin \mathrm{e}^x + k)\mathrm{e}^{-x}.$$

We bepalen k zo dat aan de beginwaarde is voldaan:

$$0 = y(0) = (\sin 1 + k) \cdot 1,$$

waaruit $k = -\sin 1$ volgt. De gevraagde oplossing is dus

$$y = (\sin \mathrm{e}^x - \sin 1)\mathrm{e}^{-x}.$$

8. Er bestaat een constante k zo dat voor alle $n \in \mathbb{N}$ geldt: 4 pt.

$$\int_0^4 x^n \sqrt{\frac{4-x}{x}} \,\mathrm{d}x = k^{n+1} \int_{-1}^1 x^{2n} \sqrt{1-x^2} \,\mathrm{d}x.$$

Laat dat zien en bepaal k.

Uitwerking: Substitueer $x = 4u^2$ in de linker integraal:

$$\begin{aligned}\int_0^4 x^n \sqrt{\frac{4-x}{x}}\,\mathrm{d}x &= \int_0^1 (4u^2)^n \sqrt{\frac{4}{4u^2} - 1} \cdot 8u\,du \\ &= 4^n \cdot 8 \int_0^1 u^{2n} \sqrt{1-u^2}\,\mathrm{d}u \\ &= 4^{n+1} \int_{-1}^1 u^{2n} \sqrt{1-u^2}\,\mathrm{d}u.\end{aligned}$$

Hier is op de derde regel gebruikt dat de integrand even is, waardoor we een factor 2 kunnen wegwerken in een aanpassing van het integratie-interval. We zien dus dat de bewering waar is voor $k = 4$.

De laatste infi-vraag is altijd bedoeld voor wie wil laten zien een 10 waard te zijn. De uitdagingen waren hier (i) de verleiding weerstaan om beide integralen uit te rekenen, (ii) de naam van de integratievariabele niet belangrijk vinden, (iii) de juiste substitutie zien en (iv) gebruik maken van het feit dat de integrand even is.