Oplossingen voor het tentamen Bewijzen in de Wiskunde (WISB102), Universiteit Utrecht
Dinsdag 9 november 2021, 11:30 - 14:30

Docenten: Álvaro del Pino Gomez, Guido Terra-Bleeker, Jeroen Maes, Mikhail Hlushchanka, Fabian Ziltener, Marieke van der Wegen

---

Opgave 1 (8 pt, beweringen)

(a). Dat $\big((P \vee Q) \wedge R\big) \implies \big(P \vee (Q \wedge R)\big)$ een tautologie is volgt uit de volgende waarheidstabel:

P	Q	R	$P \vee Q$	$(P \vee Q) \wedge R$	$Q \wedge R$	$P \vee (Q \wedge R)$	$\big((P \vee Q) \wedge R\big) \implies \big(P \vee (Q \wedge R)\big)$
T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	F	F	T	T
T	F	T	T	T	F	T	T
T	F	F	T	F	F	T	T
F	T	T	T	T	T	T	T
F	T	F	T	F	F	F	T
F	F	T	F	F	F	F	T
F	F	F	F	F	F	F	T

(b). **Nee.** Zoals uit de waarheidstabel blijkt bestaat er een geval waarin $P \vee (Q \wedge R)$ waar is en $(P \vee Q) \wedge R$ niet waar is, namelijk het geval waarin P en Q waar zijn, maar R onwaar is. (Zie de tweede regel van de waarheidstabel.) In dit geval is de implicatie $\big(P \vee (Q \wedge R)\big) \implies \big((P \vee Q) \wedge R\big)$ onjuist.

Algemene feedback:

- De "omgekeerde implicatie" verwijst naar $\big(P \vee (Q \wedge R)\big) \implies \big((P \vee Q) \wedge R\big)$, niet naar de ontkenning $\sim \Big(\big((P \vee Q) \wedge R\big) \implies \big(P \vee (Q \wedge R)\big)\Big)$ noch naar de contrapositie $\sim \big(P \vee (Q \wedge R)\big) \implies \sim \big((P \vee Q) \wedge R\big)$.

Opgave 2 (3 pt, complementen van verzamelingen)

We beschouwen deelverzamelingen A, B en C van een universele verzameling S.
Te bewijzen:

$$\overline{A \cap (B \cup C)} = (\overline{A} \cup \overline{B}) \cap (\overline{A} \cup \overline{C}).$$

Bewijs: We gaan twee inclusies $\subseteq$ en $\supseteq$ bewijzen:

$\subseteq$: Beschouw een willekeurig element $x \in \overline{A \cap (B \cup C)}$. Daarvoor geldt dan dat $x \in S$ en $x \notin A \cap (B \cup C)$. Het is dus níet zo dat x zowel in A als in $B \cup C$ zit. We kunnen nu twee gevallen onderscheiden: hetzij $x \in A$ of $x \notin A$:

- Als $x \in A$, dan kan x niet in $B \cup C$ zitten, want dan zou het een element zijn van zowel A als $B \cup C$. Maar dat impliceert dat $x \notin B$, want anders zou x wél een element van $B \cup C$ zijn. Daaruit volgt dan dat $x \in \overline{B}$ en dus ook dat $x \in \overline{A} \cup \overline{B}$.
  Op dezelfde manier kunnen we aantonen dat $x \in \overline{A} \cup \overline{C}$. We weten nu dus dat zowel $x \in \overline{A} \cup \overline{B}$ als $x \in \overline{A} \cup \overline{C}$. Dat betekent dus dat $x \in (\overline{A} \cup \overline{B}) \cap (\overline{A} \cup \overline{C})$.
- Als $x \notin A$, dan betekent dat dat $x \in \overline{A}$. Daaruit volgt dat $x \in \overline{A} \cup \overline{B}$ en ook dat $x \in \overline{A} \cup \overline{C}$, hetgeen betekent dat $x \in (\overline{A} \cup \overline{B}) \cap (\overline{A} \cup \overline{C})$.

$\supseteq$: Beschouw een willekeurig element $x \in (\overline{A} \cup \overline{B}) \cap (\overline{A} \cup \overline{C})$. Daarvoor geldt dan dat $x \in \overline{A} \cup \overline{B}$ én $x \in \overline{A} \cup \overline{C}$. We onderscheiden nu twee gevallen: hetzij $x \in \overline{A}$, of $x \notin \overline{A}$:

- Als $x \in \overline{A}$, dan is $x \in S$ en $x \notin A$. Dat laatste impliceert dat $x \notin A \cap (B \cup C)$ en dus dat $x \in \overline{A \cap (B \cup C)}$.
- Als $x \notin \overline{A}$, dan moet x wel een element van $\overline{B}$ zijn, omdat x anders geen element van $\overline{A} \cup \overline{B}$ zou zijn. Dit betekent dat $x \in S$ en $x \notin B$. Om dezelfde reden moet gelden dat $x \notin C$. Hieruit volgt dat $x \notin B \cup C$ en dus ook dat $x \notin A \cap (B \cup C)$. Daaruit volgt tenslotte dat ook in dit geval geldt dat $x \in \overline{A \cap (B \cup C)}$.

Als je deze bewijs-methode hebt gebruikt, dan krijg je voor deze opgave:

- $\frac{1}{4}$ pt voor het opdelen in twee inclusies,
- $\frac{1}{4}$ pt voor de opzet voor $\subseteq$, dat wil zeggen: *Aannemen* dat $x \in \overline{A \cap (B \cup C)}$ en *bewijzen* dat $x \in (\overline{A} \cup \overline{B}) \cap (\overline{A} \cup \overline{C})$. En daarbinnen:
  - $\frac{3}{4}$ pt voor het geval dat $x \in A$,
  - $\frac{1}{2}$ pt voor het geval dat $x \notin A$,
- $\frac{1}{4}$ pt voor de opzet voor $\supseteq$, dat wil zeggen: *Aannemen* dat $x \in (\overline{A} \cup \overline{B}) \cap (\overline{A} \cup \overline{C})$ en *bewijzen* dat $x \in \overline{A \cap (B \cup C)}$. En daarbinnen:
  - $\frac{1}{4}$ pt voor het geval dat $x \in \overline{A}$,
  - $\frac{3}{4}$ pt voor het geval dat $x \notin \overline{A}$.

Alternatief bewijs: Er was in de tentamenopgave niet gezegd dat je geen gebruik zou mogen maken van de rekenregels voor verzamelingen, dus je zou het bewijs ook kunnen geven door verwijzing naar de rekenregels:

$$\overline{A \cap (B \cup C)} = \overline{A} \cup \overline{B \cup C} = \overline{A} \cup (\overline{B} \cap \overline{C}) = (\overline{A} \cup \overline{B}) \cap (\overline{A} \cup \overline{C}).$$

Hierbij volgen de eerste twee gelijkheden uit de De Morgan rules voor het complement van een doorsnede of vereniging van twee verzamelingen, toegepast op de doorsnede van A en $B \cup C$ respectievelijk de vereniging van B met C. De derde en laatste gelijkheid volgt tenslotte uit de distributie-regel van de vereniging met $\overline{A}$ over de doorsnede van $\overline{B}$ en $\overline{C}$.

Als je voor deze methode hebt gekozen, dan krijg je voor deze opgave:

- $1\frac{1}{2}$ pt voor het (2x) toepassen van de De Morgan rules,
- $\frac{3}{4}$ pt voor het toepassen van de distributieregel,
- $\frac{3}{4}$ pt voor het correct verwijzen naar de desbetreffende rekenregels.

Tenslotte nog wat **algemene feedback** naar aanleiding van de nagekeken tentamens:

- Een plaatje (van Venn-diagrammen) is geen bewijs. “Deze verzamelingen zijn gelijk; kijk maar: de plaatjes zijn hetzelfde” is weinig meer dan zeggen, “Het is zo, omdat het zo is”. Dat laatste is alleen een argument als iets zo gedefiniëerd is.
- Een verzameling is geen bewering. Je kunt ze dus niet aannemen of concluderen en ze kunnen niet “kloppen”. De volgende zinssneden hebben dus allemaal geen betekenis:
  - “Stel $(\overline{A} \cup \overline{B}) \cap (\overline{A} \cup \overline{C})$”
  - “Hieruit volgt $\overline{A} \cup (\overline{B} \cap \overline{C})$”
  - “Dus $\overline{A} \cup \overline{B \cup C}$”
  - “$\overline{A \cap (B \cup C)}$ is geldig”

  In plaats daarvan moet je beweringen formuleren die gaan over de gelijkheid van de desbetreffende verzameling aan andere verzamelingen.
- Associativiteit betekent dat bijvoorbeeld $X \cup (Y \cup Z) = (X \cup Y) \cup Z$ (gaat dus over het “verplaatsen van haakjes”). Dit is NIET hetzelfde als distributiviteit.

Opgave 3 (12 pt, relaties, partities)

Zij S een verzameling, R een equivalentierelatie op S en $x, y \in S$. We schrijven xRy d.e.s.d.a. $(x, y) \in R$. We definiëren de equivalentieklasse van x onder de equivalentierelatie R als de verzameling

$$[x] := [x]_R := \{y \in S \mid xRy\}.$$

(a).
- Voor elke $m \in \mathbb{N}$ deelt m zichzelf en geldt daarom dat mRm. Dus R is reflexief.
- Er geldt dat $1R2$, maar niet dat $2R1$. Daarom is R niet symmetrisch.
- Zij $k, m, n \in \mathbb{N}$ zó, dat kRm en mRn. Dan bestaan er gehele getallen a, b zó, dat $m = ak$ en $n = bm$. Hieruit volgt dat $n = (ba)k$, dus k deelt n en daarom kRn. Hieruit volgt dat R transitief is.
- De relatie R is geen equivalentierelatie omdat zij niet symmetrisch is.

(b). Een partitie van een verzameling S is een verzameling P met de volgende eigenschappen:
- $\emptyset \notin P$
- P is paarsgewijs disjunct, d.w.z. voor elk tweetal verschillende elementen A, B van P geldt $A \cap B = \emptyset$.
- $\bigcup P := \bigcup_{A \in P} A = S$.

(De laatste voorwaarde impliceert dat P uit deelverzamelingen van S bestaat.) De partities van de verzameling $\{0, 1, 2\}$ worden gegeven door

$$\big\{\{0, 1, 2\}\big\}, \quad \big\{\{i, i + 1\}, \{i - 1\}\big\},\ i = 0, 1, 2, \quad \big\{\{0\}, \{1\}, \{2\}\big\},$$

waarbij we met de index i modulo 3 rekenen, dus $2 + 1 = 0$ en $0 - 1 = 2$. Deze verzamelingen voldoen namelijk inderdaad aan de bovenstaande voorwaarden en ze zijn de enige verzamelingen met deze eigenschappen. (Waarom?)

(c). We zullen de volgende stelling gebruiken.

Stelling 1 (hoofdstelling over equivalentierelaties en partities) *Voor elke verzameling S gelden de volgende uitspraken:*

(i) *Voor elke equivalentierelatie R op S is de verzameling*

$$\mathcal{P}_R := \big\{[x]_R \,\big|\, x \in S\big\}$$

een partitie van S.

(ii) *Voor elke partitie P van S is de verzameling*

$$\mathcal{R}_P := \big\{(x,y) \,\big|\, \exists X \in P : x, y \in X\big\}$$

een equivalentierelatie op S.

(iii) *De afbeeldingen*

$$\begin{aligned} \mathcal{P} &: \big\{\text{equivalentierelatie op } S\big\} \to \big\{\text{partitie op } S\big\}, \quad \mathcal{P}(R) := \mathcal{P}_R, \\ \mathcal{R} &: \big\{\text{partitie op } S\big\} \to \big\{\text{equivalentierelatie op } S\big\}, \quad \mathcal{R}(P) := \mathcal{R}_P, \end{aligned}$$

zijn inversen van elkaar.

Bewijs: Met [CPZ] bedoelen we het volgende boek:

G. Chartrand, A. D. Polimeni, P. Zhang, *Mathematical Proofs, A Transition to Advanced Mathematics*, third ed., Pearson.

Uitspraak (i) is [CPZ, Theorem 8.3]. Uitspraak (ii) volgt uit het bewijs van [CPZ, Theorem 8.4]. De uitspraak $\mathcal{P} \circ \mathcal{R} = \mathrm{id}$ volgt uit het bewijs van [CPZ, Theorem 8.4]. De uitspraak $\mathcal{R} \circ \mathcal{P} = \mathrm{id}$ volgt uit een soortgelijk argument. Dit bewijst (iii) en sluit het bewijs van Stelling 1 af. $\square$

Vanwege Stelling 1 wordt de verzameling van alle equivalentierelaties op de verzameling $\{0,1,2\}$ gegeven door het beeld van de afbeelding $\mathcal{R}$. Vanwege deelopgave (b) worden de elementen van dit beeld gegeven door

$$\{0,1,2\}\times\{0,1,2\}, \quad \big(\{i,i+1\}\times\{i,i+1\}\big)\cup\big\{(i-1,i-1)\big\},\ i = 0,1,2, \quad \big\{(0,0),(1,1),(2,2)\big\}.$$

Opgave 4 (6 pt, negatie van een uitspraak)

(a). De ontkenning van de bewering

$$\forall C \in \mathbb{R} \colon \exists \delta > 0 \colon \forall x \in \mathbb{R} \colon \quad |x| \le \delta \;\Rightarrow\; \sin(x) > C \tag{1}$$

luidt

$$\begin{aligned} & \sim\!\big(\forall C \in \mathbb{R} \colon \exists \delta > 0 \colon \forall x \in \mathbb{R} \colon \quad |x| \le \delta \;\Rightarrow\; \sin(x) > C\big) \\ \equiv \quad & \exists C \in \mathbb{R} \colon \forall \delta > 0 \colon \exists x \in \mathbb{R} \colon \quad \sim\!\big(|x| \le \delta \;\Rightarrow\; \sin(x) > C\big) \\ \equiv \quad & \exists C \in \mathbb{R} \colon \forall \delta > 0 \colon \exists x \in \mathbb{R} \colon \quad |x| \le \delta \;\wedge\; \sim\!\big(\sin(x) > C\big) \\ \equiv \quad & \exists C \in \mathbb{R} \colon \forall \delta > 0 \colon \exists x \in \mathbb{R} \colon \quad |x| \le \delta \quad\wedge\quad \sin(x) \le C \end{aligned}$$

Je krijgt voor deze opgave:

- $1\frac{1}{2}$ pt voor het "doorrijgen" van de ontkenning door de kwantoren,
- 1 pt voor de ontkenning van de implicatie,
- $\frac{1}{2}$ pt voor het behouden van $|x| \leq \delta$ en de ontkenning van $\sin(x) > C$.

Algemene feedback naar aanleiding van de nagekeken tentamens:

- Begin nooit zomaar met een formule zonder de context te introduceren. Het moet duidelijk zijn wat de *status* van een bewering is, dus welke rol de bewering speelt in jouw redenering. Sommige studenten begonnen met alleen de onderstaande regels onder elkaar, zonder verdere toelichting:

$$\begin{array}{rlll} \forall C \in \mathbb{R}\colon & \exists \delta > 0\colon & \forall x \in \mathbb{R}\colon & |x| \leq \delta \;\Rightarrow\; \sin(x) > C \\ \sim\!\big(\forall C \in \mathbb{R}\colon & \exists \delta > 0\colon & \forall x \in \mathbb{R}\colon & |x| \leq \delta \;\Rightarrow\; \sin(x) > C\big) \\ \exists C \in \mathbb{R}\colon \sim\!\big(& \exists \delta > 0\colon & \forall x \in \mathbb{R}\colon & |x| \leq \delta \;\Rightarrow\; \sin(x) > C\big) \end{array}$$

  De eerste en tweede regel zijn duidelijk niet equivalent aan elkaar, terwijl de student met de tweede en derde (en daaropvolgende) regels waarschijnlijk wel wil zeggen dat deze equivalent zijn. Maar zonder toelichting is dat niet duidelijk.

- Het standaard-symbool voor een implicatie is $\Rightarrow$, niet $\rightarrow$.

(b). De bewering (1) is NIET waar. De ontkenning is namelijk WEL waar. Bewijs:
Kies $C = 1$ en zij $\delta > 0$ gegeven. Beschouw dan $x = 0$. Daarvoor geldt dat

$$|x| = |0| = 0 \leq \delta,$$

maar ook dat

$$\sin(x) = \sin(0) = 0 \leq 1 = C.$$

Je krijgt voor deze opgave:

- 1 pt voor de constatering dat de bewering (1) NIET waar is,
- $\frac{5}{4}$ pt voor de opzet van het bewijs; dat wil zeggen:
  - Kies een C,
  - beschouw een willekeurige δ,
  - kies een x,
  - en laat zien dat $|x| \leq \delta$, maar NIET $\sin(x) > C$,
- $\frac{3}{4}$ pt voor een geschikte keuze van C en x.

Algemene feedback naar aanleiding van de nagekeken tentamens:

- Zeg niet alleen dát er zulke C en x bestaan, maar *bewijs* zo'n uitspraak door een expliciet voorbeeld te geven.
- Geef expliciet antwoord op de vraag. Zeg dus expliciet dat de oorspronkelijke bewering niet waar is, voordat je dat gaat bewijzen. Zeg ook liever niet alleen "De bewering", want dan is het onduidelijk of je het over de oorspronkelijke bewering hebt of over de zojuist geformuleerde ontkenning daarvan.

- Het woord “Stelling” heeft niet dezelfde lading als het woord “Bewering”. Een “Stelling” wordt in de wiskunde altijd gevolgd door een bewijs (en is dus altijd waar). Dat geldt hier niet voor bewering (1).

Opgave 5 (8 pt, macht versus faculteit, Fibonacci-getallen)

(a). Voor elke $n \in \mathbb{N}$ geldt dat $n^n \geq n!$.

Bewijs: We bewijzen dit met inductie.

Inductiebasis: Bekijk het geval $n = 1$. Dan geldt $n^n = 1^1 = 1$ en $n! = 1! = 1$. Dus er geldt inderdaad dat $n^n \geq n!$ voor $n = 1$.

Inductiestap: Laat $k \in \mathbb{N}$ en stel dat de bewering waar is voor $n = k$. Dat wil zeggen, stel dat $k^k \geq k!$. Dit is onze inductiehypothese.

Bekijk nu $n = k + 1$. We zien dat

$$(k+1)^{k+1} = (k+1)(k+1)^k.$$

Omdat $k + 1 \geq k$, geldt dat $(k + 1)^k \geq k^k$. Dus er volgt dat

$$\begin{aligned}(k+1)^{k+1} &\geq (k+1)k^k \\ &\geq (k+1)\cdot k!,\end{aligned}$$

wegens de inductiehypothese. Uit de definitie van $(k + 1)!$ volgt nu dat

$$(k+1)^{k+1} \geq (k+1)!.$$

We concluderen dat $n^n \geq n!$ voor alle $n \in \mathbb{N}$. □

(b). Voor elke $n \in \mathbb{N}$ geldt dat $\sum_{i=1}^{n} F_i = F_{n+1} - 1$.

Bewijs: We bewijzen dit met inductie.

Inductiebasis: Bekijk het geval $n = 1$. Dan geldt $\sum_{i=1}^{n} F_i = F_1 = 1$ en $F_{n+1} - 1 = F_3 - 1 = F_1 + F_2 - 1 = 1 + 1 - 1 = 1$. Dus er geldt inderdaad dat $\sum_{i=1}^{n} F_i = F_{n+1} - 1$ voor $n = 1$.

Inductiestap: Laat $k \in \mathbb{N}$ en stel dat de bewering waar is voor $n = k$. Dat wil zeggen, stel dat $\sum_{i=1}^{k} F_i = F_{k+1} - 1$. Dit is onze inductiehypothese.

Bekijk nu $n = k + 1$. We zien dat

$$\sum_{i=1}^{k+1} F_i = \sum_{i=1}^{k} F_i + F_{k+1}.$$

Uit de inductiehypothese volgt dat

$$\sum_{i=1}^{k+1} F_i = F_{k+2} - 1 + F_{k+1}.$$

Uit de definitie van de Fibonaccigetallen volgt dat

$$\sum_{i=1}^{k+1} F_i = F_{k+3} - 1.$$

We concluderen dat $\sum_{i=1}^{n} F_i = F_{n+1} - 1$ voor alle $n \in \mathbb{N}$. $\square$

Puntenverdeling: Je krijgt per deelopgave:

- 1 pt voor de basis,
- 1 pt voor de hypothese,
- 2 pt voor de stap.

Algemene feedback:

- Schrijf je inductiestap niet in de vorm 'Stel $n = k+1$, dan $\sum_{i=1}^{k+1} F_i = F_{k+3} - 1$. Dus ..., dus ... En dit klopt.'. Dit eerste zin suggereert namelijk dat die gelijkheid geldt, terwijl je die nog moet gaan bewijzen.

Opgave 6 (8 pt, convergentie van een rij)

(a). Voor elke $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ definiëren we $P(n)$ als de volgende uitspraak:

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{4^k} = \frac{4}{3} - \frac{1}{3 \cdot 4^n}$$

We laten met behulp van inductie zien dat voor alle $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ de uitspraak $P(n)$ geldt.

Inductiebegin: We hebben

$$\sum_{k=0}^{0} \frac{1}{4^k} = \frac{1}{4^0} = 1 = \frac{4}{3} - \frac{1}{3 \cdot 4^0}.$$

Dus $P(0)$ is waar.

Inductiestap: Zij $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ zó, dat $P(k)$ geldt. We hebben

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{k+1} \frac{1}{4^k} &= \sum_{k=0}^{k} \frac{1}{4^k} + \frac{1}{4^{k+1}} \\
&= \frac{4}{3} - \frac{1}{3 \cdot 4^k} + \frac{1}{4^{k+1}} \qquad \text{(vanwege onze inductiehypothese } P(k)\text{)} \\
&= \frac{4}{3} + \frac{-4+3}{3 \cdot 4^{k+1}} \\
&= \frac{4}{3} - \frac{1}{3 \cdot 4^{k+1}}.
\end{aligned}$$

Dus $P(k+1)$ is waar. Dit bewijst dat voor elke $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ de implicatie $P(k) \implies P(k+1)$ waar is.

Met behulp van inductie volgt hieruit dat voor alle $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ de uitspraak $P(n)$ waar is.

(b). Zij $\varepsilon > 0$. We kiezen een natuurlijk getal

$$N \geq -\log_4(\varepsilon).$$

Zij $n \geq N$ een natuurlijk getal. Dan geldt dat $n \geq -\log_4(\varepsilon)$, daarom dat $-n \leq \log_4(\varepsilon)$ en dus dat

$$4^{-n} \leq \varepsilon. \tag{2}$$

We hebben

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{4^k} - \frac{4}{3} \right| &= \frac{1}{3 \cdot 4^n} \qquad \text{(vanwege deelopgave (a))} \\ &< \varepsilon \qquad \text{(vanwege (2)).} \end{aligned}$$

De rij

$$\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{4^k} \right)_{n \in \mathbb{N}}$$

convergeert dus naar $\frac{4}{3}$.

Opgave 7 (10 pt, cardinaliteit, bijectie tussen verzamelingen)

(a). De verzameling S is een cirkel met straal 1 en middelpunt de oorsprong. In de wiskunde op de universiteit bedoelen we hiermee de rand van een schijf, dus niet de schijf zelf.

(b). We definiëren

$$\begin{aligned} S^+ &:= \{(x, y) \in S \mid y \geq 0\}, \\ S^- &:= \{(x, y) \in S \mid y < 0\} \end{aligned}$$

en de afbeeldingen

$$\begin{aligned} f &: S^+ \to [-1, 1], \quad f(x, y) := x, \\ g &: S^- \to (1, 3), \quad f(x, y) := x + 2, \end{aligned}$$

$$h : S \to \mathbb{R}, \quad h := \begin{cases} f & \text{op } S^+, \\ g & \text{op } S^-. \end{cases}$$

De afbeeldingen f en g zijn bijectief. (Ga dit na!) Hieruit volgt dat h injectief is.

De afbeelding $k := \frac{2}{\pi} \arctan : \mathbb{R} \to (-1, 1)$ is bijectief. Hieruit volgt dat $f^{-1} \circ k$ een injectieve afbeelding van $\mathbb{R}$ naar S is.

Omdat er ook een injectieve afbeelding andersom is (namelijk h), volgt daarom uit de stelling van Schröder-Bernstein dat er een bijectieve afbeelding tussen $\mathbb{R}$ en S is.