# Tentamen Bewijzen in de Wiskunde (WISB102)
# Dinsdag 9 november 2021, 11:30 - 14:30

**Docenten:** Álvaro del Pino Gomez, Guido Terra-Bleeker, Jeroen Maes, Mikhail Hlushchanka, Fabian Ziltener, Marieke van der Wegen

---

Boeken, cursusmateriaal en rekenmachines mogen niet gebruikt worden, maar het is toegestaan om één vel aantekeningen te gebruiken die je zelf met de hand geschreven hebt (A4-formaat, voor- en achterkant). Andere hulpmiddelen zijn niet toegestaan.

26 punten zijn voldoende voor een cijfer 5.5.

**Aanwijzingen:**

- **Schrijf je naam en studentnummer op elk vel.**
- **Gebruik een apart vel voor iedere opgave.**
- Zet je mobiele telefoon uit en leg hem in je tas.
- Leg je studentenkaart op tafel.
- Dit tentamen bevat een NEDERLANDSE en een ENGELSE VERSIE.
  De Engelse versie staat na de Nederlandse versie.
- Het tentamen bestaat uit zeven opgaven.
- Tenzij anders aangegeven, mag je elke uitspraak gebruiken die in het cursusboek is bewezen, zonder haar opnieuw te bewijzen, behalve als de uitspraak (deel van) een opgave in het cursusboek is. Geef het aan als je een resultaat uit het boek gebruikt.
- Bewijs elke andere uitspraak die je doet. Rechtvaardig je berekeningen. Ga na dat aan de voorwaarden van de stellingen die je gebruikt is voldaan.
- Ook als je een onderdeel van een opgave niet kunt bewijzen, mag je dat resultaat in het vervolg wel gebruiken.
- Schrijf met een blauwe of zwarte pen, **niet** met een groene of rode pen, noch met een potlood.

Succes!

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | $\sum$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| /8 | /3 | /12 | /6 | /8 | /8 | /10 | /55 |

We duiden met $\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$ de verzameling van de natuurlijke getallen zonder 0 aan en met $\mathbb{R}$ de verzameling van de reële getallen.

## Opgave 1 (8 pt, beweringen)

(a). **(5 pt)** Bewijs dat de volgende uitspraak een tautologie is, d.w.z. zij geldt voor alle beweringen $P, Q, R$:

$$\big((P \vee Q) \wedge R\big) \Longrightarrow \big(P \vee (Q \wedge R)\big).$$

(b). **(3 pt)** Geldt de omkering van de bovenstaande implicatie voor alle beweringen $P, Q, R$?

**Opmerking:** Denk eraan om alles wat je beweert te bewijzen.

## Opgave 2 (3 pt, complementen van verzamelingen)

Zij $S$ een verzameling. Voor elke deelverzameling $A$ van $S$ duiden we met $\overline{A}$ het complement van $A$ in $S$ aan. Bewijs dat voor alle deelverzamelingen $A, B, C$ van $S$ de volgende gelijkheid geldt:

$$\overline{A \cap (B \cup C)} = (\overline{A} \cup \overline{B}) \cap (\overline{A} \cup \overline{C}).$$

## Opgave 3 (12 pt, relaties, partities)

(a). **(6 pt)** Beschouw de relatie $R$ op $\mathbb{N}$ gegeven door

$$R = \big\{(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \,\big|\, m \text{ deelt } n\big\}.$$

Bewijs of weerleg elke van de volgende beweringen:

- $R$ is reflexief.
- $R$ is symmetrisch.
- $R$ is transitief.
- $R$ is een equivalentierelatie.

(b). **(3 pt)** Geef alle partities van de verzameling $\{0, 1, 2\}$ aan.

(c). **(3 pt)** Geef alle equivalentierelaties op de verzameling $\{0, 1, 2\}$ als deelverzamelingen van $\{0, 1, 2\} \times \{0, 1, 2\}$ aan.

Z.O.Z.

## Opgave 4 (6 pt, negatie van een uitspraak)

(a). **(3 pt)** Herformuleer de ontkenning van de bewering

$$\forall C \in \mathbb{R}\colon \exists \delta > 0\colon \forall x \in \mathbb{R}\colon \quad |x| \leq \delta \;\Rightarrow\; \sin(x) > C \tag{1}$$

zodanig dat er geen expliciete ontkenning meer in voorkomt.

**Opmerking:** Laat de tussenstappen die je maakt zien.

(b). **(3 pt)** Is de bewering (1) waar?

**Opmerking:** Je mag hier eigenschappen van de sinusfunctie gebruiken zonder deze te bewijzen.

## Opgave 5 (8 pt, macht versus faculteit, Fibonacci-getallen)

(a). **(4 pt)** We definiëren $1! := 1$ en recursief voor $k \in \mathbb{N}$, $(k+1)! := (k+1)k!$ . Bewijs dat voor elke $n \in \mathbb{N}$ de volgende ongelijkheid geldt:

$$n^n \geq n!$$

(b). **(4 pt)** We definiëren de Fibonacci getallen door $F_1 := 1$, $F_2 := 1$ en recursief voor $k \in \mathbb{N}$, door $F_{k+2} := F_k + F_{k+1}$. Bewijs dat voor alle $n \in \mathbb{N}$ geldt dat

$$\sum_{i=1}^{n} F_i = F_{n+2} - 1.$$

## Opgave 6 (8 pt, convergentie van een rij)

(a). **(4 pt)** Bewijs dat voor elke $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ de volgende gelijkheid geldt:

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{4^k} = \frac{4}{3} - \frac{1}{3 \cdot 4^n}.$$

(b). **(4 pt)** Geef een $\varepsilon$-$N$-bewijs dat de rij

$$\left( \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{4^k} \right)_{n \in \mathbb{N}}$$

convergeert. (In het boek wordt deze rij als $\left\{\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{4^k}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ geschreven.)

**Opmerking:** Je mag hiervoor deel (a) van deze opgave gebruiken ook als je het niet bewezen hebt.

Z.O.Z.

## Opgave 7 (10 pt, cardinaliteit, bijectie tussen verzamelingen)

(a). **(2 pt)** Maak een plaatje van de verzameling

$$S := \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \,|\, x^2 + y^2 = 1\}.$$

(b). **(8 pt)** Bewijs dat er een bijectie bestaat tussen verzameling van de reële getallen $\mathbb{R}$ en $S$.

**Opmerking:** Voor elke tweetal van reële getallen $a < b$ bestaat er een bijectieve afbeelding tussen het open interval $(a, b)$ en $\mathbb{R}$. Als je een formule voor zo'n afbeelding aangeeft dan mag je zonder bewijs gebruiken dat de afbeelding bijectief is.

### EINDE TENTAMEN - ENGELSE VERTALING OP VOLGENDE PAGINA'S

We denote by $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$ the set of natural numbers without 0 and by $\mathbb{R}$ the set of all real numbers.

## Exercise 1 (8 pt, statements)

(a). **(5 pt)** Show that the following statement is a tautology, i.e., it holds for all statements $P, Q, R$:

$$\big((P \vee Q) \wedge R\big) \implies \big(P \vee (Q \wedge R)\big).$$

(b). **(3 pt)** Does the converse of the above implication hold for all statements $P, Q, R$?

**Remark:** Remember that you need to prove all statements that you make.

## Exercise 2 (3 pt, set complements)

Let $S$ be a set. For every subset $A$ of $S$ we denote by $\overline{A}$ the complement of $A$ in $S$. Show that for all subsets $A, B, C$ of $S$ the following equality holds:

$$\overline{A \cap (B \cup C)} = (\overline{A} \cup \overline{B}) \cap (\overline{A} \cup \overline{C}).$$

## Exercise 3 (12 pt, relations, partitions)

(a). **(6 pt)** Consider the relation $R$ on $\mathbb{N}$ given by

$$R = \big\{(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \,\big|\, m \text{ divides } n\big\}.$$

Prove or disprove each of the following statements:

- $R$ is reflexive.
- $R$ is symmetric.
- $R$ is transitive.
- $R$ is an equivalence relation.

(b). **(3 pt)** Specify all partitions of the set $\{0, 1, 2\}$.

(c). **(3 pt)** Specify all equivalence relations on the set $\{0, 1, 2\}$ as subsets of $\{0, 1, 2\} \times \{0, 1, 2\}$.

More exercises on the next page.

## Exercise 4 (6 pt, negation of a statement)

(a). **(3 pt)** Reformulate the negation of the statement

$$\forall C \in \mathbb{R}\colon \exists \delta > 0\colon \forall x \in \mathbb{R}\colon \quad |x| \le \delta \;\Rightarrow\; \sin(x) > C \tag{2}$$

in such a way that it does not contain any explicit negation anymore.

Show the intermediate steps that you make.

(b). **(3 pt)** Is the statement (2) true?

**Remark:** Here you may use properties of the sine function without proving them.

## Exercise 5 (8 pt, power versus factorial, Fibonacci numbers)

(a). **(4 pt)** We define $1! := 1$ and recursively for $k \in \mathbb{N}$, $(k+1)! := (k+1)k!$. Prove that for every $n \in \mathbb{N}$ the following inequality holds:

$$n^n \ge n!$$

(b). **(4 pt)** We define the Fibonacci numbers by $F_1 := 1$, $F_2 := 1$, and recursively for $k \in \mathbb{N}$, by $F_{k+2} := F_k + F_{k+1}$. Prove that for every $n \in \mathbb{N}$ we have

$$\sum_{i=1}^{n} F_i = F_{n+2} - 1.$$

## Exercise 6 (8 pt, convergence of a sequence)

(a). **(4 pt)** Prove that for every $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ the following equality holds:

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{4^k} = \frac{4}{3} - \frac{1}{3 \cdot 4^n}.$$

(b). **(4 pt)** Give an $\varepsilon$-$N$-proof that the sequence

$$\left( \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{4^k} \right)_{n \in \mathbb{N}}$$

converges. (In the book this sequence is written as $\left\{ \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{4^k} \right\}_{n \in \mathbb{N}}$.)

**Remark:** You may use part (a) of this exercise here, even if you have not proved it.

More exercises on the next page.

## Exercise 7 (10 pt, cardinality, bijection between sets)

(a). **(2 pt)** Draw a picture of the set

$$S := \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x^2 + y^2 = 1\}.$$

(b). **(8 pt)** Prove that there exists a bijection between the set $\mathbb{R}$ of real numbers and the set $S$.

**Remark:** For every pair of real numbers $a < b$ there exists a bijective map between the open interval $(a, b)$ and $\mathbb{R}$. If you give a formula for such a map then you may use without proof that the map is bijective.