Hertentamen Bewijzen in de Wiskunde (WISB102)
Donderdag 23 december 2021

Docenten: Álvaro del Pino Gomez, Guido Terra-Bleeker, Jeroen Maes, Mikhail Hlushchanka, Fabian Ziltener, Marieke van der Wegen

---

Boeken, cursusmateriaal en rekenmachines mogen niet gebruikt worden, maar het is toegestaan om één vel aantekeningen te gebruiken die je zelf met de hand geschreven hebt (A4-formaat, voor- en achterkant). Andere hulpmiddelen zijn niet toegestaan.

26 punten zijn voldoende voor een cijfer 5.5.

Aanwijzingen:

- **Schrijf je naam en studentnummer op elk vel.**
- **Gebruik een apart vel voor iedere opgave.**
- Zet je mobiele telefoon uit en leg hem in je tas.
- Leg je studentenkaart op tafel.
- Dit tentamen bevat een NEDERLANDSE en een ENGELSE VERSIE.
  De Engelse versie staat na de Nederlandse versie.
- Het tentamen bestaat uit zeven opgaven.
- Tenzij anders aangegeven, mag je elke uitspraak gebruiken die in het cursusboek is bewezen, zonder haar opnieuw te bewijzen, behalve als de uitspraak (deel van) een opgave in het cursusboek is. Geef het aan als je een resultaat uit het boek gebruikt.
- Bewijs elke andere uitspraak die je doet. Rechtvaardig je berekeningen. Ga na dat aan de voorwaarden van de stellingen die je gebruikt is voldaan.
- Ook als je een onderdeel van een opgave niet kunt bewijzen, mag je dat resultaat in het vervolg wel gebruiken.
- Schrijf met een blauwe of zwarte pen, **niet** met een groene of rode pen, noch met een potlood.

Succes!

1	2	3	4	5	6	7	$\sum$
/11	/7	/3	/9	/10	/8	/8	/56

We duiden met $\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$ de verzameling van de natuurlijke getallen zonder 0 aan, met $\mathbb{Z}$ de verzameling van de gehele getallen en met $\mathbb{R}$ de verzameling van reële getallen.

Opgave 1 (11 pt, uitspraken)

(a). **(6 pt)** Voor elke uitspraak P duiden we met $\sim P = \neg P$ de ontkenning van P aan. Zij P, Q, R uitspraken. Laat zien dat de volgende samengestelde uitspraken logisch equivalent zijn:

$$(P \implies Q) \implies R \qquad \text{en} \qquad (P \vee R) \wedge ((\sim Q) \vee R).$$

(b). **(3 pt)** Herformuleer de ontkenning van de uitspraak

$$\forall x \in \mathbb{R} \colon \forall y \in \mathbb{R} \colon \exists z \in \mathbb{R} \colon \quad (x < z) \wedge (z \leq y) \tag{1}$$

op een zodanige manier dat er geen expliciete ontkenning meer in voorkomt.

Opmerking: Laat de tussenstappen die je maakt zien.

(c). **(2 pt)** Is de uitspraak (1) waar?

Opmerking: Denk eraan om alles wat je beweert te bewijzen.

Opgave 2 (7 pt, relaties)

Voor elke verzameling S duiden we met $\mathcal{P}(S)$ de machtsverzameling van S, d.w.z. de verzameling van alle deelverzamelingen van S. Beschouw de relatie R op $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ gegeven door

$$R := \{(A, B) \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \times \mathcal{P}(\mathbb{N}) \colon A \cap B = \emptyset\}.$$

(a). **(2 pt)** We definiëren $A := \{1, 4\}$, $B := \{2, 3\}$ en $C := \{2, 4\}$. Welke van de uitspraken $A\,R\,B$ (d.w.z. $(A, B) \in R$), $B\,R\,C$ en $C\,R\,A$ gelden?

(b). **(5 pt)** Bewijs of weerleg elk van de volgende uitspraken:

- R is reflexief.
- R is symmetrisch.
- R is transitief.
- R is een equivalentierelatie.

Opgave 3 (3 pt, operaties op verzamelingen)

Zij S een verzameling. Voor elke deelverzameling A van S duiden we met $\overline{A}$ het complement van A in S aan. Laat zien dat voor alle deelverzamelingen A, B, C van S de volgende gelijkheid geldt:

$$\overline{A \cup (B \cap C)} = (\overline{A} \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap \overline{C}).$$

Z.O.Z.

Opgave 4 (9 pt, Fibonaccigetallen)

(a). **(4 pt)** We definiëren de Fibonaccigetallen door $F_1 := 1$, $F_2 := 1$, and recursief voor $k \in \mathbb{N}$, door $F_{k+2} := F_k + F_{k+1}$. Bewijs dat voor elke $n \in \mathbb{N}$ de volgende gelijkheid geldt:

$$\sum_{i=1}^{n} F_i^2 = F_n F_{n+1}.$$

(b). **(1 pt)** We definiëren $\varphi := \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Laat zien dat $\varphi^2 - \varphi - 1 = 0$.

(c). **(4 pt)** Laat zien dat $F_n \geq \varphi^{n-2}$ voor elke $n \in \mathbb{N}$.

Opgave 5 (10 pt, congruentie en deelbaarheid)

(a). **(2 pt)** Laat zien dat $3^4 \equiv 1 \mod 10$.

(b). **(3 pt)** Wat is het laatste cijfer van 3^{2021} in het decimale talstelstel?

(c). **(5 pt)** Bewijs dat een natuurlijk getal door 9 deelbaar is d.e.s.d.a. de som van zijn cijfers (in het decimale talstelstel) door 9 deelbaar is.

Hint: Zij $n \in \mathbb{N}$ en $n_k \dots n_0$ de decimale ontwikkeling van n, d.w.z. $n_k, \dots, n_0$ zijn de decimale cijfers van n. (Bijvoorbeeld worden de decimale cijfers van $n = 453$ gegeven door $n_2 = 4$, $n_1 = 5$, $n_0 = 3$.) Je mag de volgende gelijkheid gebruiken zonder haar te bewijzen: $n = \sum_{i=0}^{k} n_i \cdot 10^i$.

Opgave 6 (8 pt, differentieerbaarheid en afgeleide)

Geef een ε-δ-bewijs dat de functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, gedefineerd door $f(x) = x^3$, in het punt 1 differentieerbaar is en bereken haar afgeleide in dit punt.

Opmerking: Je mag hier geen rekenregels voor limieten gebruiken.

Opgave 7 (8 pt, bijectie tussen verzamelingen, kardinaliteit)

Bewijs dat er een bijectieve afbeelding tussen de verzameling $\mathbb{R}$ van reëele getallen en de verzameling $\mathbb{Z} \times \mathbb{R}$ bestaat.

Opmerking: Voor elk tweetal van reëele getallen $a < b$ bestaat er een bijectieve afbeelding tussen het open interval (a, b) en $\mathbb{R}$. Als je een formule voor zo'n afbeelding aangeeft dan mag je zonder bewijs gebruiken dat de afbeelding bijectief is.

EINDE TENTAMEN - ENGELSE VERTALING OP VOLGENDE PAGINA'S

We denote by $\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$ the set of natural numbers without 0, by $\mathbb{Z}$ the set of integers, and by $\mathbb{R}$ the set of real numbers.

Exercise 1 (11 pt, statements)

(a). **(6 pt)** For every statement P we denote by $\sim P = \neg P$ the negation of P. Let P, Q, R be statements. Show that the following two compound statements are logically equivalent:

$$(P \implies Q) \implies R \qquad \text{and} \qquad (P \vee R) \wedge ((\sim Q) \vee R).$$

(b). **(3 pt)** Reformulate the negation of the statement

$$\forall x \in \mathbb{R} \colon \forall y \in \mathbb{R} \colon \exists z \in \mathbb{R} \colon \quad (x < z) \wedge (z \leq y) \tag{1}$$

in such a way that it does not contain any explicit negation anymore.

Remark: Show the intermediate steps that you make.

(c). **(2 pt)** Is the statement (1) true?

Remark: Remember that you need to prove all statements that you make.

Exercise 2 (7 pt, relations)

For every set S we denote by $\mathcal{P}(S)$ the power set of S, i.e., the set of all subsets of S. Consider the relation R on $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ given by

$$R := \{(A, B) \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \times \mathcal{P}(\mathbb{N}) \colon A \cap B = \emptyset\}.$$

(a). **(2 pt)** We define $A := \{0, 3\}$, $B := \{1, 2\}$ and $C := \{1, 3\}$. Which of the statements $A\,R\,B$ (i.e., $(A, B) \in R$), $B\,R\,C$ and $C\,R\,A$ are true?

(b). **(5 pt)** Prove or disprove each of the following statements:

- R is reflexive.
- R is symmetric.
- R is transitive.
- R is an equivalence relation.

Exercise 3 (3 pt, set operations)

Let S be a set. For every subset A of S we denote by $\overline{A}$ the complement of A in S. Show that for all subsets A, B, C of S the following equality holds:

$$\overline{A \cup (B \cap C)} = (\overline{A} \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap \overline{C}).$$

More exercises on the next page.

Exercise 4 (9 pt, Fibonacci numbers)

(a). **(4 pt)** We define the Fibonacci numbers by $F_1 := 1$, $F_2 := 1$, and recursively for $k \in \mathbb{N}$, by $F_{k+2} := F_k + F_{k+1}$. Prove that for every $n \in \mathbb{N}$ we have

$$\sum_{i=1}^{n} F_i^2 = F_n F_{n+1}.$$

(b). **(1 pt)** We define $\varphi := \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Show that $\varphi^2 - \varphi - 1 = 0$.

(c). **(4 pt)** Show that $F_n \geq \varphi^{n-2}$ for each $n \in \mathbb{N}$.

Exercise 5 (10 pt, congruence and divisibility)

(a). **(2 pt)** Show that $3^4 \equiv 1 \mod 10$.

(b). **(3 pt)** What is the last digit of 3^{2021} in the decimal system?

(c). **(5 pt)** Prove that a natural number is divisible by 9 if and only if the sum of its digits (in the decimal system) is divisible by 9.

Hint: Let $n \in \mathbb{N}$ and $n_k \dots n_0$ be the decimal expansion of n, that is, $n_k, \dots, n_0$ are the decimal digits of n. (For example, the decimal digits of $n = 453$ are $n_2 = 4$, $n_1 = 5$, $n_0 = 3$.) You may use the following equality without proving it: $n = \sum_{i=0}^{k} n_i \cdot 10^i$.

Exercise 6 (8 pt, differentiability and derivative)

Give an ε-δ-proof that the function $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, defined by $f(x) = x^3$, is differentiable in the point 1, and calculate its derivative at this point.

Remark: You may **not** use any limit laws here.

Exercise 7 (8 pt, bijection between sets, cardinality)

Prove that there exists a bijective map between the set $\mathbb{R}$ of real numbers and the set $\mathbb{Z} \times \mathbb{R}$.

Remark: For every pair of real numbers $a < b$ there exists a bijective map between the open interval (a, b) and $\mathbb{R}$. If you give a formula for such a map then you may use without proof that the map is bijective.