Herkansingstentamen Grondslagen van de Wiskunde, 21 april 2021, 11.30-14.30

DIT TENTAMEN BEVAT 5 OPGAVEN; ZIE OOK DE OMMEZIJDE.
Alle opgaven tellen even zwaar (10 punten); je cijfer is het totaal aantal punten, gedeeld door 5. Als een opgave uit meerdere deeltjes bestaat, staat bij elk deeltje hoeveel van de 10 punten dat deeltje waard is.
Advies: maak eerst die opgaven, die je kunt; en ga dan nadenken over de rest. Succes!

Opgave 1. Geef voor elk van onderstaande verzamelingen aan, of deze eindig, aftelbaar oneindig of overaftelbaar is. Beredeneer je antwoord kort.

a) (3) $A_1 = \{X \subseteq \mathbb{N} \,|\, \forall x \in X(x \text{ is een priemgetal})\}$.

b) (2) $A_2 = \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \,|\, \forall n(f(n+1) \text{ is een echte deler van } f(n))\}$ (hier betekent "a is echte deler van b": er is een $c > 1$ met $ac = b$).

c) (3) $A_3 = \{X \subseteq \mathbb{N} \,|\, \forall Y \subseteq \mathbb{N}(X \subseteq Y \text{ of } Y \subseteq X)\}$.

d) (2) $A_4 = \{q \in \mathbb{Q} \,|\, 5q^5 - q^4 - 3q^2 - q = 0\}$.

Opgave 2. Laat $(L, \leq)$ een lineaire ordening zijn met de volgende eigenschap: voor elke deelverzameling X van L geldt, dat als X een stricte bovengrens in L heeft, X een *kleinste* stricte bovengrens in L heeft. Hier betekent: "y is een stricte bovengrens van X in L", dat $y \in L$ en voor elke $x \in X$ geldt $x < y$ (i.h.b. $x \neq y$).

Bewijs, dat L een welordening is.

Opgave 3. Laat L de taal zijn met twee functiesymbolen f en g; f is éénplaatsig, g is tweeplaatsig. Zij M de L-structuur met onderliggende verzameling $\mathbb{R}_{\geq 0}$, $f^M(x) = e^x$, en $g^M(x, y) = x + y$.

a) (3) Geef L-formules die de getallen 0 en 1 definiëren in M (dat wil zeggen: een L-formule $\phi_0(x)$ zodat voor $a \in M$ geldt: $M \models \phi_0(a) \Leftrightarrow a = 0$, en dito voor het getal 1).

b) (4) Geef een L-formule die in M de deelverzameling $\{x \in \mathbb{R}_{\geq 0} \,|\, x \geq 1\}$ definieert.

c) (3) Geef een L-formule die in M de verzameling van 3-tallen $\{(x, y, z) \,|\, x \geq 1, y \geq 1, z = xy\}$ definieert.

Opgave 4. Laat met bewijsbomen zien:

a) (3) $\phi \wedge \neg\psi \vdash \neg(\phi \to \psi)$.

b) (3) $\forall y R(f(y)), \exists z(x = f(z)) \vdash R(x)$.

c) (4) $(\phi \to \exists y \psi(y)) \vdash \exists y(\phi \to \psi(y))$, waarbij je mag aannemen dat de variabele y niet in de formule ϕ voorkomt.

Opgave 5. Laat X een transitieve verzameling zijn. Dus: als $u \in X$ en $a \in u$, dan ook $a \in X$.

a) (5) Stel $X \neq \emptyset$. Laat zien dat $\emptyset \in X$.

b) (5) Stel $X - \{\emptyset\} \neq \emptyset$. Laat zien dat $\{\emptyset\} \in X$.

Hint: in beide opgaven, gebruik het axioma van regulariteit.