Hertentamen
Numerieke Wiskunde (WISB251)

Woensdag 7 juli 2021, 15:15-18:15

Vraag 1

In deze vraag bekijken we de afrondfout in de berekening $y = \frac{1}{7} + \frac{1}{x}$. Je mag aannemen dat x een zwevendekomma-getal is.

a) Laat zien dat de *relatieve fout* kan worden begrensd door

$$\frac{|\mathrm{fl}(y) - y|}{|y|} \leq \frac{2\eta}{1 - 2\eta} \frac{7 + |x|}{|7 + x|},$$

waarbij η de afrondeenheid is.

b) Voor welke waarde(n) van x is deze berekening problematisch? En waarom?

Vraag 2

We gebruiken de volgende vastepunt-iteratie:

$$x_{k+1} = x_k - 2\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

om de nulpunten te vinden van de functie

$$f(x) = (x-3)^2(x+1).$$

a) Convergeert de iteratie naar het nulpunt $x_* = 3$ wanneer $x_0 = 3 + \delta$ met $|\delta|$ klein genoeg ? Zoja, hoe snel (lineair of kwadratisch)? Beargumenteer ook duidelijk waarom.

b) Convergeert de iteratie naar het nulpunt $x_* = -1$ wanneer $x_0 = -1 + \delta$ met $|\delta|$ klein genoeg ? Zoja, hoe snel (lineair of kwadratisch)? Beargumenteer weer duidelijk waarom.

Vraag 3

We passen de volgende benadering van de afgeleide toe:

$$f'(x_0) \approx p_2'(x_0) = \frac{-f(x_0+2h) + 4f(x_0+h) - 3f(x_0)}{2h}.$$

a) Stel het interpolatie-polynoom p_2 met steunpunten $\{x_0, x_0+h, x_0+2h\}$ op en laat zien dat dit tot de gegeven benadering van de afgeleide van f in x_0 leidt.

b) Laat zien dat de bijbehorende fout voldoet aan:

$$f'(x_0) - p_2'(x_0) = \tfrac{1}{3}h^2 f'''(\xi),$$

waarbij $\xi \in [x_0, x_0+2h]$.

c) Gegeven is de functie $f(x) = \mathrm{e}^x$ en een $\epsilon > 0$.
Bepaal de stapgrootte h zodanig dat $|f'(x_0) - p_2'(x_0)| \leq \epsilon$ voor alle $x_0 \in [0,2]$.

Vraag 4

We bekijken de volgende methode om de differentiaalvergelijking $u'(t) = f(u(t))$ op te lossen:

$$u_{n+1} = u_n + 2hf(u_n) - hf\big(u_n - \tfrac{h}{2}f(u_n)\big).$$

Hierbij is u_n een benadering van de exacte waarde $u(nh)$ in t_n.

a) Laat zien dat deze methode een lokale afbreek(truncatie)fout van orde h^3 heeft.

b) Bepaal het stabiliteitsgebied in het complexe vlak van deze methode.

c) Welke van de volgende ZES stabiliteitsgebieden (zie bladzijde 3) correspondeert met die van de methode uit deze vraag?
Geef een argument voor je keuze! D.w.z. geef ook aan waarom de overige vijf gebieden niet de juiste zijn.

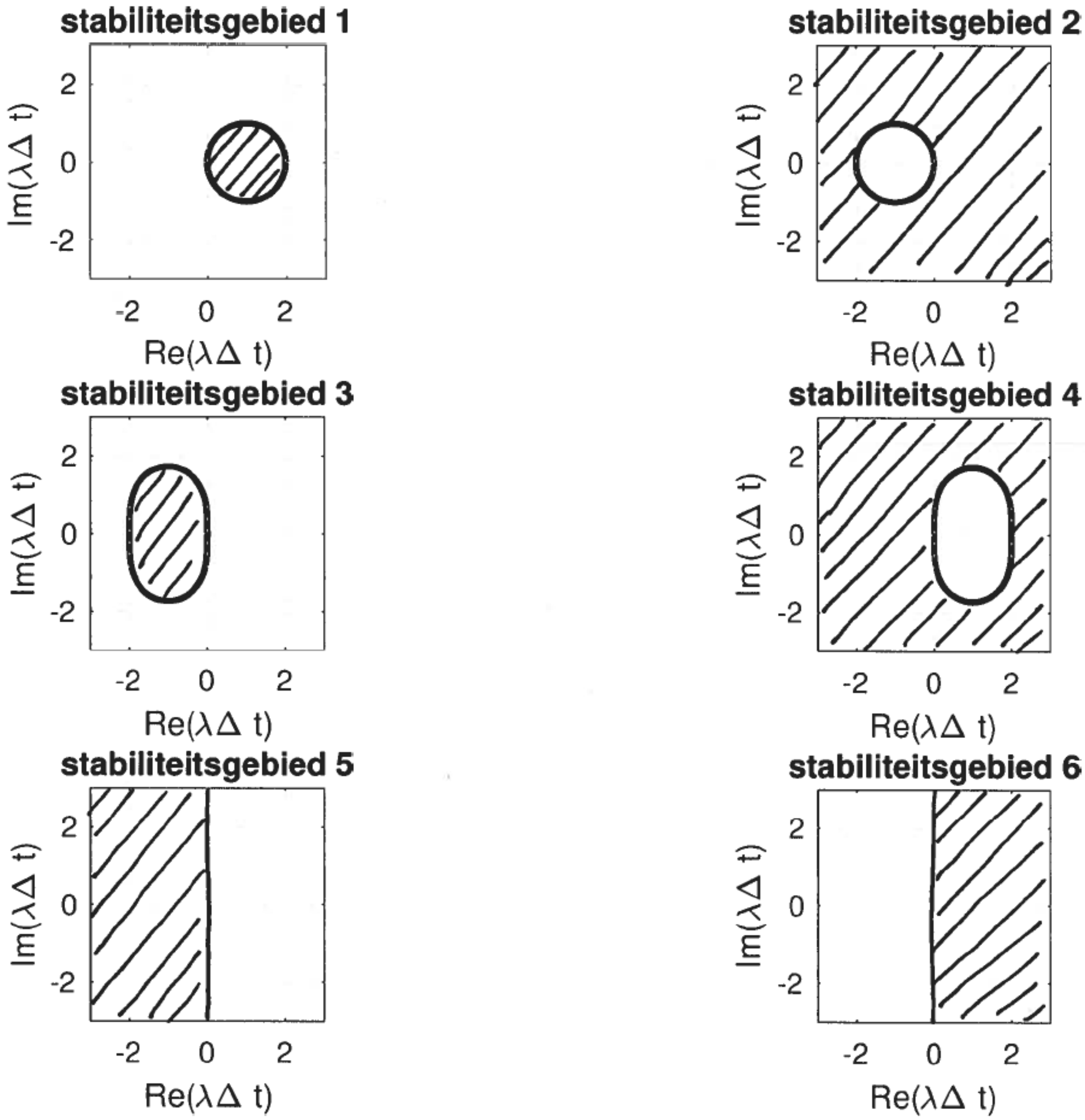

Fig. 1: Zes verschillende gebieden in het complexe vlak. Het ge-arceerde gedeelte geeft het stabiele deel aan voor elk van de zes gebieden.