Retake Exam Inleiding Topologie, 22 April 2021

Name ____

- Je mag het dictaat, je handgeschreven aantekeningen en je oplossingen van de inleveropgaven gebruiken.
- Je moet alle beweringen bewijzen die niet uit hoor- of werkcollege bekend zijn. In het bijzonder: als een opgave je naar een voorbeeld vraagt, moet je **bewijzen** dat je voorbeeld an de eizen voldoet.
- Lees alle opgaven voordat je begint te werken.
- Als je de eerste deel van een opgave niet kunt oplossen, kun je niettemin het resultaat in de tweede deel gebruiken.

- You can use the lecture notes, your handwritten notes and your solutions to the hand-in exercises.
- All claims have to be proven (if they are not known from the lecture or exercises). In particular if you are asked for an example you have to **prove** that the example satisfies the requirements.
- Read through all problems before you start to work.
- If you are unable to solve the first part of a question, you can still use the result in the second part.

Below you find first an English, then a Dutch version of the exam. You can write all solutions in Dutch or English.

Problem 1 (9 points). *Consider the following three subsets of $\mathbb{R}^2$ equipped with the subspace topology:*

- $A_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$
- $A_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{4}x^2 + y^2 = 1\}$
- $A_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 = 1\}$

Give a sketch of all three subspaces. Then decide for each pair of subspaces whether they are homeomorphic or not: if they are, give a homeomorphism; if they are not, give an argument why they are not homeomorphic.

Problem 2 (6 points). *Let $(X, \mathcal{T}_X)$ and $(Y, \mathcal{T}_Y)$ be topological spaces and $A \subseteq Y$ be a subset equipped with the subspace topology; we denote by $i\colon A \to Y$ the inclusion. Show that a function $f\colon X \to A$ is continuous if and only if the composition $i \circ f\colon X \to Y$ is continuous.*

Problem 3 (6 points). *Let $f\colon S^1 \to \mathbb{R}$ be a continuous map. Show that $f(S^1)$ is of the form $[a, b]$ with $a \leq b \in \mathbb{R}$.*

Problem 4 (10 points). *Let $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$ be the natural numbers and $X = \{p \in \mathbb{N} : p \text{ is prime}\} \cup \{0\}$. For every $k \in \mathbb{N}$ define $V_k = \{p \in X : p \text{ divides } k\}$.*[1]*. Let $\mathcal{T}$ be the smallest topology on X such that every V_k is closed (i.e. a complement of an element of $\mathcal{T}$). You are allowed to use without proof that the closed sets with respect to $\mathcal{T}$ are precisely those that can be written as intersections of sets of the form $V_{k_1} \cup \dots \cup V_{k_n}$ for $k_1, \dots, k_n > 0$ (and X itself).*

(a) Decide (with argument) for each point $p \in X$ whether $\{p\}$ is closed.

(b) Show that a subset $A \subseteq X$ is closed if and only if $A = X$ or A is finite and does not contain 0.

(c) Decide (with argument) whether $\mathcal{T}$ is Hausdorff and whether $\mathcal{T}$ is compact.

Problem 5 (9 points). *Let M be the Möbius band and denote by $p\colon [0, 1]^2 \to M$ the quotient map, where $p(0, x) = p(1, 1 - x)$.*

(a) Construct for each $x \in [0, 1]$ an embedding $i\colon S^1 \to M$ such that $p([0, 1] \times \{x\}) \subseteq i(S^1)$.

(b) Give (with argument) examples $i, j\colon S^1 \to M$ of embeddings such that $M \setminus i(S^1)$ is not homeomorphic to $T \setminus j(S^1)$.

[1] We use here the convention that 0 only divides itself and that a natural number is prime if it has exactly two divisors; in particular 1 is not a prime number.

Problem 6 (10 points). *Let $C \subset \mathbb{R}$ be the subset of all numbers of the form $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{3^i}$ with $a_i \in \{0,2\}$ (you can assume without proof that these series converge and that $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{3^i} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{b_i}{3^i}$ only if $a_i = b_i$ for all i if $a_i, b_i \in \{0,2\}$). We will consider it with the subspace topology.*

(a) *Show that $C \subset \mathbb{R}$ is a closed subset.*

(b) *Show that mapping $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{3^i}$ to $(i \mapsto a_i)$ defines a continuous map $C \to \mathcal{F}(\mathbb{N}, \{0,2\})$, where $\{0,2\}$ is equipped with the discrete topology and $\mathcal{F}(\mathbb{N}, \{0,2\})$ is the space of functions with the topology of pointwise convergence.*

(c) *Show that the map defined in part (b) is a homeomorphism and deduce that $\mathcal{F}(\mathbb{N}, \{0,2\})$ is compact.*

Opgave 1 (9 punten). *Bekijk de volgende drie deelverzamelingen van $\mathbb{R}^2$ met de deelruimtetopologie:*

- $A_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$
- $A_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{4}x^2 + y^2 = 1\}$
- $A_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 = 1\}$

Zet een schets op papier van de drie deelruimtes. Bepaal voor iedere paar van deelruimtes of ze homeomorf zijn: als ze het zijn, geef een homeomorfisme; als ze het niet zijn, geef een argument waarom ze niet homeomorf zijn.

Opgave 2 (6 punten). *Zijn $(X, \mathcal{T}_X)$ en $(Y, \mathcal{T}_Y)$ topologische ruimtes en $A \subseteq Y$ een deelverzameling met de deelruimtetopologie; zij $i\colon A \to Y$ de inclusie. Laat zien dat een functie $f\colon X \to A$ dan en slechts dan continu is als de compositie $i \circ f\colon X \to Y$ continu is.*

Opgave 3 (6 punten). *Zij $f\colon S^1 \to \mathbb{R}$ een continu afbeelding. Bewijs dat $f(S^1)$ van de vorm $[a,b]$ met $a \leq b \in \mathbb{R}$ is.*

Opgave 4 (10 punten). *Beschouw de natuurlijke getallen $\mathbb{N} = \{1,2,\dots\}$ en de verzameling $X = \{p \in \mathbb{N} : p \text{ is prime}\} \cup \{0\}$. Voor iedere $k \in \mathbb{N}$ defineer $V_k = \{p \in X : p \text{ divides } k\}$.*[2]*. Zij $\mathcal{T}$ de kleinste topologie op X zodat iedere V_k afgesloten is (d.w.z. een complement van een element van $\mathcal{T}$). Je kunt zonder bewijs gebruiken dat een deelverzameling afgesloten (ten aanzien van $\mathcal{T}$) is dan en slechts dan als ze een doorsnede van verzamelingen van de vorm $V_{k_1} \cup \dots \cup V_{k_n}$ met $k_1, \dots, k_n > 0$ is (of X zelf).*

[2] Hier gebruiken we de conventie dat 0 alleen 0 deelt en een natuurlijke getal priem is als het precies twee deler heeft; in het bijzonder is 1 geen priemgetal.

(a) *Bepaal (met argument) for iedere punt* $p \in X$ *of* $\{p\}$ *afgesloten is.*

(b) *Bewijs dat een deelverzameling* $A \subseteq X$ *dan en slechts dan afgesloten is als* $A = X$ *of* A *eindig is met* $0 \notin A$.

(c) *Bepaal (met argument) of* $\mathcal{T}$ *Hausdorff is en of* $\mathcal{T}$ *compact is.*

Opgave 5 (9 punten)**.** *Zij* M *het Möbiusband en* $p \colon [0,1]^2 \to M$ *de kwotiëntenafbeelding, waar* $p(0,x) = p(1, 1-x)$.

(a) *Construeer voor iedere* $x \in [0,1]$ *een inbedding* $i \colon S^1 \to M$ *zodat* $p([0,1] \times \{x\}) \subseteq i(S^1)$.

(b) *Geef (met argument) voorbeelden* $i, j \colon S^1 \to M$ *van inbeddingen zodat* $M \setminus i(S^1)$ *niet homeomorf met* $T \setminus j(S^1)$ *is.*

Opgave 6 (10 points)**.** *Zij* $C \subset \mathbb{R}$ *de deelverzameling van alle getallen van de vorm* $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{3^i}$ *met* $a_i \in \{0,2\}$ *(je kunt zonder bewijs gebruiken dat deze reeksen convergeren en dat* $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{3^i} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{b_i}{3^i}$ *alleen als* $a_i = b_i$ *voor alle* i *als* $a_i, b_i \in \{0,2\}$*). We bekijken* C *met de deelruimtetopologie.*

(a) *Bewijs dat* $C \subset \mathbb{R}$ *afgesloten is.*

(b) *Bewijs dat de afbeelding* $C \to \mathcal{F}(\mathbb{N}, \{0,2\})$ *die* $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{3^i}$ *naar* $(i \mapsto a_i)$ *stuurt continu is, waar* $\{0,2\}$ *met de discrete topologie verzien is en* $\mathcal{F}(\mathbb{N}, \{0,2\})$ *is de ruimte van functies met de topologie van puntsgewijze convergentie.*

(c) *Bewijs dat de afbeelding in deel (b) een homeomorfisme is en leid af dat* $\mathcal{F}(\mathbb{N}, \{0,2\})$ *compact is.*