Hertentamen Differentiaalvergelijkingen (WISB231), 8 juli 2021, 15:15-18:15

Dit 'open book' tentamen bestaat uit vier opgaven. Motiveer uw antwoorden. Succes!

Opgave 1 [20 pt] Beschouw de matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 6 \\ 1 & -2 & 2 \\ -1 & 0 & -3 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

(a) [5 pt] Vind $\det(\mathrm{e}^{xA})$.

(b) [15 pt] Bereken e^{xA}.

Opgave 2 [50 pt] Beschouw het stelsel differentiaalvergelijkingen in $\mathbb{R}^2$

$$\begin{cases} \dot{q} &= p\,, \\ \dot{p} &= -(q^2+p^2)q. \end{cases} \tag{2}$$

(a) [10 pt] Laat zien dat de functie

$$H(q,p) = (q^2+p^2-1)\exp(q^2) \tag{3}$$

een *constante van beweging* is voor (2), d.w.z. voor iedere oplossing van (2) geldt

$$H(q(t),p(t)) = E$$

met constante $E = H(q(0),p(0))$.

(b) [10 pt] Bewijs dat (2) dezelfde *banen* in $\mathbb{R}^2$ heeft als het Hamilton-stelsel

$$\begin{cases} \dot{q} &= \dfrac{\partial H(q,p)}{\partial p}, \\ \dot{p} &= -\dfrac{\partial H(q,p)}{\partial q}, \end{cases} \tag{4}$$

met de Hamilton-functie (3).

(c) [10 pt] Bewijs dat (2) slechts één rustpunt heeft en bepaal de type van dit rustpunt.

(d) [10 pt] Laat zien dat iedere oplossing $t \mapsto (q(t),p(t))$ van (2) met beginvoorwaarden $(q_0,p_0) \in \mathbb{R}^2$ zodat $q_0^2+p_0^2 > 0$ is periodiek. Vind de periode van de oplossing met $q_0 = 1, p_0 = 0$.

(e) [10 pt] Schets het faseplaatje behorend bij (2) in het (q,p)-vlak. Zet ook pijltjes!

Opgave 3 [20 pt] Beschouw op $[0,1]$ het randwaardeprobleem

$$y'''(x) + 3y''(x) + 3y'(x) + y(x) = \sin(\pi x), \quad y(0) = y'(0) = y(1) = 0. \tag{5}$$

(a) [20 pt] Bewijs dat (5) precies één oplossing heeft.

(b) **Bonus** [20 pt] Vind deze oplossing.

Opgave 4 [10 pt] Zij $y(x)$ een oplossing van het beginwaardeprobleem

$$\frac{dy}{dx} = \sin(y^2), \quad y(0) = 0.$$

Vind alle a_n met $n \leq 6$ in de reeksontwikkeling $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.