Lichamen en Galoistheorie, 5 juli 2021, 11:30 – 14:30

Schrijf op elk vel je naam en studentnummer.
Laat bij elke opgave zien hoe je aan je antwoord komt!
Ook als je een onderdeel niet kunt maken, kun je het gevraagde resultaat wel gebruiken voor de daaropvolgende onderdelen.
In totaal zijn er 90 punten te behalen.
Je mag alleen gebruik maken van eigen aantekeningen en van het boek of het pdf-bestand ervan. Als je voor het lezen van het pdf-bestand een computer of ander apparaat gebruikt, moet het geluid uitstaan en de wifi uitgeschakeld zijn. Het apparaat mag geen toegang hebben tot het internet. Alleen het pdf-bestand van het boek mag geopend zijn; je mag niet typen, alleen scrollen. De surveillanten mogen je scherm bekijken.
Veel succes!

1. (**10 pt**) Laat L/K een cyclische Galoisuitbreiding van graad n zijn en laat $\sigma \in \mathrm{Gal}(L/K)$ een element van orde n zijn. Bewijs dat voor $d \in \mathbb{N}$ geldt: het invariantenlichaam van $\langle \sigma^d \rangle$ heeft graad d over K precies dan als d een deler is van n.

2. (**25 pt**) In deze opgave staat ζ_k steeds voor een primitieve k-de machts eenheidswortel in $\mathbb{C}$ (dus ζ_k heeft orde k in $\mathbb{C}^\times$). Steeds geldt $12 \leq k \leq 16$.
   (a) (**10 pt**) Bepaal de $k \in \mathbb{N}$ met $12 \leq k \leq 16$ waarvoor $\mathbb{Q}(\zeta_k)$ een deellichaam L bevat dat Galois is over $\mathbb{Q}$ van graad 3.
   (b) (**5 pt**) Bewijs dat een dergelijk deellichaam uniek is (als het bestaat).
   (c) (**10 pt**) Bepaal voor elk zulk deellichaam L een element α waarvoor $L = \mathbb{Q}(\alpha)$ geldt.

3. (**35 pt**) Laat $K = \mathbb{Q}(\sqrt[6]{2}, \sqrt{-3})$.
   (a) (**5 pt**) Bewijs: K is het splijtlichaam van $f(x) = (x^6 - 2)(x^2 + 3)$ over $\mathbb{Q}$.
   (b) (**5 pt**) Bewijs: $[K : \mathbb{Q}] = 12$.

   Noteer $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$ met G.

   (c) (**5 pt**) Bewijs dat er elementen σ en τ van G bestaan met de volgende eigenschappen: de orde van σ is 6, de orde van τ is 2, en $\tau^{-1}\sigma\tau = \sigma^{-1}$.
   (d) (**5 pt**) Bepaal van elk element van G de orde.
   (e) (**5 pt**) Zij $\gamma \in K$. Bewijs: $K = \mathbb{Q}(\gamma)$ dan en slechts dan als de G-baan van γ precies 12 (verschillende) elementen bevat.
   (f) (**5 pt**) Schrijf $\alpha = \sqrt[6]{2}$ en $\beta = \sqrt{-3}$. Bewijs: voor $c \in \mathbb{Q}$ en c voldoende groot (bijvoorbeeld $c > 10$) geldt $K = \mathbb{Q}(\alpha + c\beta)$. (Hint: teken een plaatje in het complexe vlak van de G-baan van $\alpha + c\beta$.)
   (g) (**5 pt**) Bewijs dat $K = \mathbb{Q}(\alpha + c\beta)$ voor alle $c \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$.

4. (**20 pt**) Laat K een uitbreiding van $\mathbb{F}_2$ van graad k zijn en laat L een uitbreiding van $\mathbb{F}_2$ van graad ℓ zijn. Neem aan dat K en L bevat zijn in een uitbreiding M van $\mathbb{F}_2$. Neem ook aan dat k en ℓ relatief priem zijn. Laat α een primitief element zijn voor K over $\mathbb{F}_2$ en laat β een primitief element zijn voor L over $\mathbb{F}_2$. Bewijs dat $\alpha + \beta$ een primitief element over $\mathbb{F}_2$ is voor het compositum KL.