Inl. Analyse in Meer Variabelen **Tentamen 2/11 - 2020, 13:30 -16:30**

- Schrijf op ieder vel **je naam** en bovendien op het eerste vel je **studentnummer** en het **aantal ingeleverde vellen**.
- **Onderteken** de verklaring op het blad aan het eind van dit tentamen, en voeg dat blad toe aan de scan van je werk.
- Geef niet alleen antwoorden, maar laat ook zien hoe je aan die antwoorden gekomen bent.
- **N.B.** Als je een stelling uit het dictaat gebruikt, vermeld dat dan en laat ook expliciet zien dat de voorwaarden van die stelling vervuld zijn.
- **N.B.** Als je een onderdeel van een opgave niet kunt maken, **ga dan toch door met de volgende onderdelen.** Je mag daarbij de in eerdere onderdelen verschafte informatie gebruiken.
- Het is een open boek tentamen: dictaat en aantekeningen mogen worden gebruikt.
- De normering per onderdeel en voor de opgave als geheel staan vermeld. Het totaal aantal te behalen punten is 40. Het tentamencijfer T wordt berekend uit de totale score S door $T = S/4$, uitgerekend in 1 decimaal nauwkeurig.

Succes !

10 pt totaal **Opgave 1**

4 pt (a) Toon aan dat de afbeelding $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, x \mapsto x_1x_2$ totaal differentieerbaar is, en dat voor alle $x \in \mathbb{R}^2$ geldt dat $D\varphi(x) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeven wordt door

$$D\varphi(x)(h) = h_1x_2 + h_2x_1, \quad (h \in \mathbb{R}^2).$$

2 pt (b) Gegeven zijn een open deel $U \subset \mathbb{R}^n$ en een tweetal functies $f, g : U \to \mathbb{R}$ die totaal differentieerbaar zijn in $a \in U$. Je mag gebruiken dat dan $(f, g) : U \to \mathbb{R}^2, x \mapsto (f(x), g(x))$ totaal differentieerbaar is in a. Toon aan dat de totale afgeleide gegeven wordt door:

$$D(f, g)(a) = \begin{pmatrix} Df(a) \\ Dg(a) \end{pmatrix}.$$

4 pt (c) Toon met behulp van (a), (b) en de kettingregel aan dat de functie $fg : U \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x)g(x)$ totaal differentieerbaar is in a en dat $D(fg)(a) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ gegeven wordt door

$$D(fg)(a)(h) = g(a)Df(a)(h) + f(a)Dg(a)(h), \qquad (h \in \mathbb{R}^n).$$

10 pt totaal **Opgave 2** We beschouwen de functie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeven door

$$f(x, y) = x^2 - xy + y^2 + e^{xy}.$$

6 pt (a) Toon aan dat f een lokaal extreem heeft in $(0, 0)$ en bepaal de aard ervan (lokaal minimum of maximum).

4 pt (b) Toon aan dat f geen andere lokale extremen heeft. Hint: beschouw $xD_1f - yD_2f$.

ZOZ

10 pt totaal **Opgave 3** We beschouwen de ellips

$$E := \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + 2x_2^2 = 16\}.$$

Laat $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gedefinieerd zijn door

$$f(x) = (x_1 - 1)^2 + x_2^2.$$

3 pt (a) Bewijs dat f op E een minimale waarde m aanneemt.

7 pt (b) Toon aan dat f de waarde m aanneemt in precies twee punten $a, b \in E$. Bepaal a, b en m.

10 pt totaal **Opgave 4** Gegeven is een C^1 functie $\varphi : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ die voldoet aan

$$x_i D_j \varphi(x) = x_j D_i \varphi(x), \quad (1 \leq i, j \leq 3,\ x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}).$$

Het vectorveld v op $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ wordt gedefinieerd door:

$$v(x) = \varphi(x)x, \quad (x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}).$$

3 pt (a) Toon aan dat v op $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ een unieke primitieve f heeft met $f(1,0,0) = 0$.

3 pt (b) Toon aan dat voor elke $r > 0$ geldt:

$$f(r,0,0) = \int_1^r s\,\varphi(s,0,0)\,ds.$$

In het vervolg mag je gebruiken dat er voor iedere $a \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ een C^1-kromme $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ bestaat met $\gamma(0) = (\|a\|, 0, 0)$, $\gamma(1) = a$ en $\langle \gamma(t)\,,\, \gamma(t) \rangle = \|a\|^2$. (Het beeld van γ ligt dus op de sfeer $\{x \in \mathbb{R}^3 \mid \|x\| = \|a\|\}$.)

3 pt (c) Toon aan dat voor een kromme als boven geldt:

$$\int_\gamma v(x) \cdot dx = 0.$$

1 pt (d) Druk de primitieve f uit in een integraal met φ.

Indienen van het tentamen

- Het tentamen dient na 16:30 binnen 40 minuten gescand te worden en als pdf bestand ingediend in blackboard, onder het assignment ‘tentamen’.
- De naam van het geuploade pdf bestand dient te zijn: ⟨achternaam⟩-tent.pdf/
- Blijf tot 17:00 uur bij de computer om deel te nemen aan een steekproefsgewijze controle van je identiteit per Teams. Log daartoe in bij Teams.
- Meld problemen bij scannen of uploaden direct per email aan e.p.vandenban@uu.nl of (bij internetproblemen) per telefoon: 06-29371864.
- Onderteken de volgende verklaring, en voeg dit blad met handtekening bij de scan:

  Hierbij verklaar ik dat ik de uitwerkingen van dit tentamen zelf heb gemaakt, zonder hulp van andere personen of van andere hulpmiddelen dan het dictaat, de opgavenbundel, het bij de cursus behorende materiaal, de eigen aantekeningen en het dictaat Inleiding Analyse.

  Handtekening:

Uitwerkingen

Opgave 1

(a) Er geldt dat φ een C^1-afbeelding is, met partiële afgeleiden $D_1\varphi(x) = x_2$ en $D_2\varphi(x) = x_1$. Hieruit volgt dat φ totaal differentieerbaar is, terwijl de afgeleide van φ in x gegeven wordt door

$$D\varphi(x) = (D_1\varphi(x)\ D_2\varphi(x)) = (x_2\ \ x_1).$$

Hieruit volgt dat

$$D\varphi(x)(h) = h_1 D_1\varphi(x) + h_2 D_2\varphi(x) = h_1 x_2 + h_2 x_1.$$

(b) De afgeleide $D(f,g)(a)$ is de lineaire afbeelding $\mathbb{R}^n$ De afbeelding $(f,g) : U \to \mathbb{R}^2$ is totaal differentieerbaar is in a. De afgeleide $D(f,g)(a)$ is een lineaire afbeelding $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^2$ gegeven door de Jacobi matrix met twee rijen een n kolommen. De kolommen hebben hoogte 2 en worden gegeven door

$$\begin{pmatrix} D_j f(a) \\ D_j g(a) \end{pmatrix}, \qquad (j = 1, \ldots, n).$$

Hieruit volgt

$$D(f,g)(a) = \begin{pmatrix} D_1 f(a) & \cdots & D_n f(a) \\ D_1 g(a) & \cdots & D_n g(a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Df(a) \\ Dg(a) \end{pmatrix}$$

(c) We merken op dat fg gelijk is aan de compositie $\varphi \circ (f,g)$. Immers $fg(x) = f(x)g(x) = \varphi(f(x), g(x)) = [\varphi \circ (f,g)](x)$. Wegens de kettingregel is fg daarom differentieerbaar in a met als afgeleide

$$\begin{aligned} D(fg)(a) &= D\varphi(f(a), g(a))D(f,g)(a) \\ &= (g(a)\ f(a)) \begin{pmatrix} Df(a) \\ Dg(a) \end{pmatrix} \\ &= g(a)Df(a) + f(a)Dg(a). \end{aligned}$$

Hieruit volgt het gestelde.

Opgave 2

(a) De functie f is C^1 met

$$\operatorname{grad} f(x,y) = (2x - y + ye^{xy}, -x + 2y + xe^{xy})$$

Hieruit volgt dat $\operatorname{grad} f(0,0) = 0$, dus $(0,0)$ is een stationair punt voor f. Uit de formule voor de gradient blijkt dat deze C^1 is dus f is C^2. Verder is de Hessiaan $H_f(0,0) = (D_i D_j f(0,0))$ gelijk aan

$$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

De Hessiaan heeft eigenwaarden 2, 2, en is dus positief definiet. De functie f heeft daarom een lokaal minimum in $(0,0)$.

(b) We zullen laten zien dat $(0,0)$ het enige stationaire punt van f is. Daaruit volgt het gestelde.

Uit $\operatorname{grad} f(x,y) = 0$ volgt

$$xD_1 f(x,y) = 2x^2 - xy + xye^{xy} = 0, \quad yD_2 f(x,y) - xy + 2y^2 + xye^{xy} = 0.$$

Door de vergelijkingen van elkaar af te trekken vinden we dat $x^2 = y^2$ dus $x = \pm y$. Als $x = -y$, dan volgt uit $D_1 f(0,0) = 0$ dat $3x - xe^{-x^2} = 0$, dus

$$x(3 - e^{-x^2}) = 0.$$

Omdat $e^{-x^2} \leq 1 < 3$ volgt dat $x = 0$ dus ook $y = 0$.

Als $x = y$ dan volgt uit $D_1 f(0,0) = 0$ dat $x(1 + e^{x^2}) = 0$ dus $x = 0$ en ook $y = 0$.

Opgave 3

(a) We definiëren $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ door $g(x) = x_1^2 + 2x_2^2 - 16$. Dan is g continu, en $E = g^{-1}(\{0\})$, dus E is gesloten. Uit $x \in E$ volgt $\|x\|^2 \leq x_1^2 + 2x_2^2 = 16$, dus E is begrensd. Er volgt dat E rij compact is. De continue functie $f|_E$ neemt daarom een absoluut minimum m aan in een punt van E.

(b) De functie g is partieel differentieerbaar en

$$\operatorname{grad} g(x) = (2x_1, 4x_2), \qquad (x \in \mathbb{R}^2).$$

Hieraan zien we dat g een C^1 functie is. Voor $x \in E$ geldt $x \neq (0,0)$ dus ook $\operatorname{grad} g(x) \neq (0,0)$. De functie f is partieel differentieerbaar, met gradient

$$\operatorname{grad} f(x) = (2(x_1 - 1), 2x_2).$$

Hieraan zien we dat f een C^1 functie is. Laat de waarde m aangenomen worden in een punt $y \in E$. Volgens de methode van Lagrange bestaat er een $\lambda \in \mathbb{R}$ zo dat $\operatorname{grad} f(y) = \lambda \operatorname{grad} g(y)$, dus

$$2((y_1 - 1), y_2) = 2\lambda(y_1, 2y_2).$$

Door vergelijken van de tweede componenten zien we dat $\lambda = 1/2$ of $y_2 = 0$.

In het eerste geval, $\lambda = \frac{1}{2}$, volgt dat $2(y_1 - 1) = y_1$, dus $y_1 = 2$. Uit $g(y) = 0$ volgt dan dat $y_2^2 = \frac{1}{2}(16 - y_1^2) = 6$. Dus $y = (2, \sqrt{6})$ of $y = (2, -\sqrt{6})$. Deze punten liggen inderdaad op E en er geldt bovendien dat $f(2, \sqrt{6}) = f(2, -\sqrt{6}) = 1 + 6 = 7$.

In het tweede geval, $y_2 = 0$, volgt wegens $y \in E$ dat $y_1^2 = 16$, dus $y_1 = \pm 4$. We zien dat in dit geval $y = (4,0)$ of $y = (-4, 0$ punten van E zijn, terwijl $f(4,0) = 9$ en $f(-4,0) = 25$.

Het minimum m kan alleen in de gevonden punten $(2, \sqrt{6}), (2, -\sqrt{6}), (4,0), (-4,0)$ aangenomen worden. De functie f neemt in die punten respectievelijk de waarden $7, 7, 9$ en 25 aan. Het minimum van deze waarden moet m zijn, dus $m = 7$. Deze waarde wordt precies in $a = (2, \sqrt{6})$ en $b = (2, -\sqrt{6})$ aangenomen.

Opgave 4

(a) Het vectorveld v is C^1 op $U := \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$. Voor elk tweetal indices $1 \leq i, j \leq 3$ en alle $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ geldt dat $v_j(x) = x_j \varphi(x)$ dus,

$$\begin{aligned} D_i v_j(x) &= \delta_{ij}\varphi(x) + x_j D_i \varphi(x) \\ &= \delta_{ji}\varphi(x) + x_i D_j \varphi(x) \\ &= D_j v_i(x) \end{aligned}$$

Hieruit blijkt dat v rotatievrij is op U. Uit het dictaat en de opgaven weten we dat U enkelvoudig samenhangend is. Uit Stelling 5.39 volgt nu dat v een unieke primitieve $f : U \to \mathbb{R}$ heeft met $f(e_1) = 0$.

(b) We beschouwen de kromme $\sigma : [0, 1] \to U$ gedefinieerd door $\sigma(t) = e_1 + t(re_1 - e_1) = (1 + t(r - 1), 0, 0)$. Deze is C^1 en heeft beginpunt $e_1 = (1, 0, 0)$ en eindpunt $(r, 0, 0)$. Derhalve is

$$f(r, 0, 0) = f(r, 0, 0) - f(1, 0, 0) = \int_\sigma v(x) \cdot dx.$$

Aangezien $v(\sigma(t)) = [1 + t(r - 1)]\varphi(1 + t(r - 1))e_1)e_1$ en $\sigma'(t) = (r - 1)e_1$, geldt $v(\sigma(t)) \cdot \sigma'(t) = [1 + t(r - 1)]\varphi([1 + t(r - 1)]e_1)(r - 1)$, dus

$$\int_\sigma v(x) \cdot dx = \int_0^1 [1 + t(r - 1)]\varphi([1 + t(r - 1)]e_1)\ (r - 1)dt$$

Met de subsitutie $s = 1 + t(r - 1)$ blijkt dat de laatste integraal gelijk is aan

$$\int_1^r s\,\varphi(se_1)\ ds = \int_1^r s\,\varphi(s, 0, 0)\ ds$$

Hieruit volgt het gestelde.

(c) Uit $\langle \gamma(t)\,,\, \gamma(t) \rangle = \|a\|^2$ volgt door differentiatie naar t dat

$$2\langle \gamma(t)\,,\, \gamma'(t) \rangle = 0, \quad (0 \leq t \leq 1).$$

Aangezien $v(\gamma(t)) = \varphi(\gamma(t))\gamma(t)$ volgt $v(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = 0$ voor alle $t \in [0, 1]$. Derhalve geldt

$$\int_\gamma v(x) \cdot dx = 0.$$

(d) Uit het feit dat f een primitieve van v is en γ een C^1-kromme, volgt dat

$$\int_\gamma v(x) \cdot dx = f(\gamma(1)) - f(\gamma(0)) = f(a) - f(\|a\|, 0, 0) = f(a).$$

Combineren we dit met (c) en (b) dan volgt dat

$$f(a) = f(\|a\|, 0, 0) = \int_1^{\|a\|} s\,\varphi(s, 0, 0)\ ds,$$

voor elke $a \in U$.