**Inl. Analyse in Meer Variabelen** **Tentamen 2/11 - 2020, 13:30 -16:30**

- Schrijf op ieder vel **je naam** en bovendien op het eerste vel je **studentnummer** en het **aantal ingeleverde vellen**.
- **Onderteken** de verklaring op het blad aan het eind van dit tentamen, en voeg dat blad toe aan de scan van je werk.
- Geef niet alleen antwoorden, maar laat ook zien hoe je aan die antwoorden gekomen bent.
- **N.B.** Als je een stelling uit het dictaat gebruikt, vermeld dat dan en laat ook expliciet zien dat de voorwaarden van die stelling vervuld zijn.
- **N.B.** Als je een onderdeel van een opgave niet kunt maken, **ga dan toch door met de volgende onderdelen.** Je mag daarbij de in eerdere onderdelen verschafte informatie gebruiken.
- Het is een open boek tentamen: dictaat en aantekeningen mogen worden gebruikt.
- De normering per onderdeel en voor de opgave als geheel staan vermeld. Het totaal aantal te behalen punten is 40. Het tentamencijfer $T$ wordt berekend uit de totale score $S$ door $T = S/4$, uitgerekend in 1 decimaal nauwkeurig.

*Succes !*

10 pt totaal **Opgave 1**

4 pt (a) Toon aan dat de afbeelding $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, x \mapsto x_1x_2$ totaal differentieerbaar is, en dat voor alle $x \in \mathbb{R}^2$ geldt dat $D\varphi(x) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeven wordt door

$$D\varphi(x)(h) = h_1x_2 + h_2x_1, \quad (h \in \mathbb{R}^2).$$

2 pt (b) Gegeven zijn een open deel $U \subset \mathbb{R}^n$ en een tweetal functies $f, g : U \to \mathbb{R}$ die totaal differentieerbaar zijn in $a \in U$. Je mag gebruiken dat dan $(f, g) : U \to \mathbb{R}^2, x \mapsto (f(x), g(x))$ totaal differentieerbaar is in $a$. Toon aan dat de totale afgeleide gegeven wordt door:

$$D(f, g)(a) = \begin{pmatrix} Df(a) \\ Dg(a) \end{pmatrix}.$$

4 pt (c) Toon met behulp van (a), (b) en de kettingregel aan dat de functie $fg : U \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x)g(x)$ totaal differentieerbaar is in $a$ en dat $D(fg)(a) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ gegeven wordt door

$$D(fg)(a)(h) = g(a)Df(a)(h) + f(a)Dg(a)(h), \qquad (h \in \mathbb{R}^n).$$

10 pt totaal **Opgave 2** We beschouwen de functie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeven door

$$f(x, y) = x^2 - xy + y^2 + e^{xy}.$$

6 pt (a) Toon aan dat $f$ een lokaal extreem heeft in $(0, 0)$ en bepaal de aard ervan (lokaal minimum of maximum).

4 pt (b) Toon aan dat $f$ geen andere lokale extremen heeft. Hint: beschouw $xD_1f - yD_2f$.

**ZOZ**

10 pt totaal **Opgave 3** We beschouwen de ellips

$$E := \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + 2x_2^2 = 16\}.$$

Laat $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gedefinieerd zijn door

$$f(x) = (x_1 - 1)^2 + x_2^2.$$

3 pt (a) Bewijs dat $f$ op $E$ een minimale waarde $m$ aanneemt.

7 pt (b) Toon aan dat $f$ de waarde $m$ aanneemt in precies twee punten $a, b \in E$. Bepaal $a, b$ en $m$.

10 pt totaal **Opgave 4** Gegeven is een $C^1$ functie $\varphi : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ die voldoet aan

$$x_i D_j \varphi(x) = x_j D_i \varphi(x), \quad (1 \leq i, j \leq 3,\ x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}).$$

Het vectorveld $v$ op $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ wordt gedefinieerd door:

$$v(x) = \varphi(x)x, \quad (x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}).$$

3 pt (a) Toon aan dat $v$ op $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ een unieke primitieve $f$ heeft met $f(1, 0, 0) = 0$.

3 pt (b) Toon aan dat voor elke $r > 0$ geldt:

$$f(r, 0, 0) = \int_1^r s\,\varphi(s, 0, 0)\, ds.$$

In het vervolg mag je gebruiken dat er voor iedere $a \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ een $C^1$-kromme $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ bestaat met $\gamma(0) = (\|a\|, 0, 0)$, $\gamma(1) = a$ en $\langle \gamma(t)\, ,\, \gamma(t) \rangle = \|a\|^2$. (Het beeld van $\gamma$ ligt dus op de sfeer $\{x \in \mathbb{R}^3 \mid \|x\| = \|a\|\}$.)

3 pt (c) Toon aan dat voor een kromme als boven geldt:

$$\int_\gamma v(x) \cdot dx = 0.$$

1 pt (d) Druk de primitieve $f$ uit in een integraal met $\varphi$.