Inl. Analyse in Meer Variabelen **Hertentamen 4/1 - 2021, 13:30 -16:30**

- Schrijf op ieder vel **je naam** en bovendien op het eerste vel je **studentnummer** en het **aantal ingeleverde vellen**.
- **Onderteken** de verklaring op het blad aan het eind van dit tentamen, en voeg dat blad toe aan de scan van je werk.
- Geef niet alleen antwoorden, maar laat ook zien hoe je aan die antwoorden gekomen bent.
- **N.B.** Als je een stelling uit het dictaat gebruikt, vermeld dat dan en laat ook expliciet zien dat de voorwaarden van die stelling vervuld zijn.
- **N.B.** Als je een onderdeel van een opgave niet kunt maken, **ga dan toch door met de volgende onderdelen.** Je mag daarbij de in eerdere onderdelen verschafte informatie gebruiken.
- Het is een open boek tentamen: dictaat en aantekeningen mogen worden gebruikt.
- De normering per onderdeel en voor de opgave als geheel staan vermeld. Het totaal aantal te behalen punten is 40. Het tentamencijfer T wordt berekend uit de totale score S door $T = S/4$, afgerond op een geheel getal onder de zes en een veelvoud van een half boven de zes.

Succes !

10 pt totaal **Opgave 1**

3 pt (a) Toon aan dat de afbeelding $\varphi : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R},\ y \mapsto y^{-1}$ totaal differenteerbaar is, en dat voor elke $y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ geldt dat de totale afgeleide $D\varphi(y) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeven wordt door

$$D\varphi(y)(k) = -y^{-2}k, \quad (k \in \mathbb{R}).$$

3 pt (b) Gegeven zijn een open deel $U \subset \mathbb{R}^n$, een punt $a \in U$ en een afbeelding $f : U \to \mathbb{R}$ die totaal differentieerbaar is in a terwijl $f(a) \neq 0$. Toon aan dat er een $\delta > 0$ bestaat zo dat $B(a;\delta) \subset U$ en $f(B(a;\delta)) \subset \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

4 pt (c) Toon aan dat de afbeelding $g : B(a;\delta) \to \mathbb{R}$ gedefinieerd door $g(x) = 1/f(x)$ totaal differentieerbaar is in a, terwijl de totale afgeleide $Dg(a) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ gegeven wordt door

$$Dg(a)(h) = -\frac{1}{f(a)^2} Df(a)(h), \qquad (h \in \mathbb{R}^n).$$

10 pt totaal **Opgave 2** We beschouwen de functie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeven door

$$f(x,y) = x^2 + 2y^2 + 2xy - x + e^x, \qquad ((x,y) \in \mathbb{R}^2).$$

5 pt (a) Toon aan dat f precies één stationair punt heeft, namelijk $(0,0)$.

5 pt (b) Toon aan dat f precies één lokaal extreem heeft en bepaal de aard ervan (lokaal minimum of maximum).

ZOZ

10 pt totaal **Opgave 3** We beschouwen de verzameling

$$S := \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}.$$

Laat $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ gedefinieerd zijn door

$$f(x) = x_1^2 + 2bx_2 + 2bx_3.$$

Hierin is $b > 0$ een gegeven positief reëel getal met $2b^2 \geq 1$.

3 pt (a) Beargumenteer dat f op S een maximale waarde m aanneemt en dat $m > 0$.

7 pt (b) Toon aan dat f de waarde m aanneemt in een uniek punt $p \in S$ en dat $p_1 = 0$. Geef een formule die m uitdrukt in b.

10 pt totaal **Opgave 4** Gegeven is een C^1 functie $\varphi : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ die voldoet aan

$$x_1 D_1\varphi(x) + x_2 D_2\varphi(x) = -2\varphi(x), \qquad (x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}).$$

Het vectorveld v op $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ wordt gedefinieerd door:

$$v(x) = \varphi(x)(-x_2, x_1), \qquad (x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}).$$

2 pt (a) Toon aan dat het vectorveld v rotatievrij is op $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.

In het vervolg veronderstellen we dat U een open deel van $\mathbb{R}^2$ is met de eigenschap dat $0 \notin U$ en dat voor alle $a \in U$ en alle $r > 0$ geldt dat $ra \in U$. We veronderstellen voorts dat $f : U \to \mathbb{R}$ een primitieve is van v.

4 pt (b) Toon aan dat $f(ra) = f(a)$ voor alle $a \in U$ en $r \geq 1$. Hint: beschouw de integraal van v langs een geschikte kromme.

4 pt (c) Als gegeven is dat $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ bewijs dan dat

$$\int_0^\pi \varphi(\cos t, \sin t)\, dt = -\int_0^\pi \varphi(\cos t, -\sin t)\, dt.$$

Indienen van het hertentamen

- Het hertentamen dient na 16:30 binnen 40 minuten gescand te worden en als pdf bestand ingediend in blackboard, onder het assignment ‘hertentamen’.
- De naam van het geuploade pdf bestand dient te zijn: ⟨achternaam⟩-herkansing.pdf/
- Blijf tot 17:00 uur bij de computer om deel te nemen aan een steekproefsgewijze controle van je identiteit per Teams. Log daartoe in bij Teams.
- Meld problemen bij scannen of uploaden direct per email aan e.p.vandenban@uu.nl of (bij internetproblemen) per telefoon: 06-29371864.
- Controleer na ieder uur je email in verband met mogelijke medelingen over het tentamen.
- Onderteken de volgende verklaring, en voeg dit blad met handtekening bij de scan:

  Hierbij verklaar ik dat ik de uitwerkingen van dit tentamen zelf heb gemaakt, zonder hulp van andere personen of van andere hulpmiddelen dan het dictaat, de opgavenbundel, het bij de cursus behorende materiaal, de eigen aantekeningen en het dictaat Inleiding Analyse.

  Handtekening:

Uitwerkingen

Opgave 1

(a) De functie φ is gewoon differentieerbaar, met afgeleide $\varphi'(y) = -1/y^2$, voor alle $y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Hieruit volgt dat φ totaal differentieerbaar is in elk punt $y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, met totale afgeleide gegeven door

$$D\varphi(y)(k) = kD\varphi(y)(1) = k\varphi'(y) = -y^{-2}k, \qquad (k \in \mathbb{R}).$$

(b) De verzameling U is open, dus er bestaat een $\delta > 0$ zo dat $B(a;\delta) \subset U$.

De afbeelding f is totaal differentieerbaar in a, dus *continu* in a.

Zij $\varepsilon := |f(a)|/2$. Dan is $\varepsilon > 0$, dus wegens de continuïteit van f in a is er een voldoend kleine $\delta > 0$ zo dat $B(a;\delta) \subset U$ en zo dat voor $x \in B(f(a);\delta)$ geldt $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$. Voor $x \in B(a;\delta)$ geldt $|f(x) - f(a)| < |f(a)|$, dus $f(x) \neq 0$. Hieruit volgt dat $f(B(a;\delta)) \subset \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Alternatief voor de laatste redenering. De verzameling $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ is open in $\mathbb{R}$ dus er bestaat een $\varepsilon > 0$ zo dat $B(f(a);\varepsilon) \subset \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Wegens de continuïteit van f in a bestaat er een voldoend kleine $\delta > 0$ zo dat $B(a;\delta) \subset U$ en $f(B(a;\delta)) \subset B(f(a);\varepsilon) \subset \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

(c) De afbeelding $g : B(a;\delta) \to \mathbb{R}$ is gelijk aan de samenstelling $\varphi \circ f$ op $B(a;\delta)$. De afbeelding f is totaal differentieerbaar in a en φ is totaal differentieerbaar in $f(a)$, dus wegens de kettingregel is $g = \varphi \circ f$ totaal differentieerbaar in a, met totale afgeleide gegeven door

$$Dg(a) = D\varphi(f(a)) \circ Df(a) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}.$$

Hieruit volgt dat

$$Dg(a)(h) = D\varphi(f(a))[Df(a)(h)] = -\frac{1}{f(a)^2}Df(a)(h), \qquad (h \in \mathbb{R}^n).$$

Opgave 2

(a) De functie f is C^2. De eerste orde partiële afgeleiden van f worden gegeven door

$$D_1 f(x,y) = 2x + 2y - 1 + e^x, \quad D_2 f(x,y) = 4y + 2x.$$

Een punt (x,y) is stationair dan en slechts dan als $\operatorname{grad} f(x,y) = 0$, hetgeen gelijkwaardig is met

$$2x + 2y - 1 + e^x = 0 \quad \text{en} \quad 4y + 2x = 0.$$

Dit is op zijn beurt weer gelijkwaardig met

$$2y = -x \quad \text{en} \quad x - 1 + e^x = 0. \qquad (*)$$

De functie $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x - 1 + e^x$ is de som van twee strikt monotoon stijgende functies, dus strikt monotoon stijgend. Het nulpunt $x = 0$ is daarom het enige nulpunt van ψ. Conditie (*) is daarom vervuld dan en slechts dan als $(x,y) = (0,0)$. Hieruit volgt dat f precies één stationair punt heeft, namelijk $(0,0)$.

(b) Als f een lokaal extreem heeft in (x, y) dan moet (x, y) een stationair punt zijn, dus $(x, y) = (0, 0)$ wegens (a). Uit de formules voor $D_1 f$ en $D_2 f$ volgt dat de Hessiaan van f in (x, y) gegeven wordt door

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} 2 + e^x & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Hieruit volgt dat $\det H_f(0, 0) = 3 \cdot 4 - 4 = 8 > 0$ terwijl $D_1^2 f(0, 0) = 3 > 0$. Met een resultaat uit het dictaat concluderen we nu dat f in $(0, 0)$ een lokaal minimum heeft. Er is dus inderdaad precies één lokaal extreem en dit is een lokaal minimum.

Opgave 3

(a) Definieer $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ door $g(x) = \|x\|^2 - 1$. Dan is g continu. Verder is $\{0\}$ is gesloten in $\mathbb{R}$ en $S = g^{-1}(\{0\})$, dus S is gesloten in $\mathbb{R}^3$. Het is evident dat $\| \cdot \| \leq 1$ op S, dus S is gesloten en begrensd. De functie f is continu, dus neemt op S een maximale waarde m aan. Er geldt $(1, 0, 0) \in S$ dus $m \geq f(1, 0, 0) = 1$ en we zien dat $m > 0$.

(b) De functies f en g zijn C^1 en hun gradiënten worden gegeven door

$$\operatorname{grad} f(x) = (2x_1, 2b, 2b), \quad \text{en} \quad \operatorname{grad} g(x) = 2x.$$

Voor alle $x \in S$ geldt dat $\|x\| = 1$ dus $\operatorname{grad} g(x) \neq 0$.

Zij $p \in S$ een punt waarin f de waarde m aanneemt. Dan bestaat er volgens de multiplicatorenstelling van Lagrange een $\lambda \in \mathbb{R}$ zo dat $\operatorname{grad} f(p) = \lambda \operatorname{grad} g(p)$, dus (na deling door 2),

$$(p_1, b, b) = \lambda(p_1, p_2, p_3).$$

Uit $p_1 \neq 0$ zou volgen dat $\lambda = 1$ en $p_2 = p_3 = b$. Uit $p \in S$ volgt dan $2b^2 = p_2^2 + p_3^2 = 1 - p_1^2$, dus $2b^2 < 1$, tegenspraak. We concluderen dat $p_1 = 0$.

Er geldt dat $b = \lambda p_2 = \lambda p_3$. Aangezien $b > 0$ concluderen we hieruit dat $\lambda \neq 0$ en dus $p_2 = p_3 = b/\lambda$. Hieruit volgt $m = f(p) = 2bp_2 + 2bp_3 = 4b^2/\lambda$. Aangezien $m > 0$ concluderen we dat $\lambda > 0$. Uit $p_2^2 + p_3^2 = 1$ leiden we nu af dat $2b^2 = \lambda^2$, dus $\lambda = b\sqrt{2}$. Tenslotte volgt door combinatie met het bovenstaande dat

$$m = 4b^2/\lambda = 2b\sqrt{2}.$$

Opgave 4

(a) Het vectorveld v op $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ is C^1 wegens de gebruikelijke rekenregels, en aangezien φ een C^1 functie is. Verder is

$$D_2 v_1(x) = \frac{\partial}{\partial x_2}(-x_2 \varphi(x)) = -\varphi(x) - x_2 D_2 \varphi(x).$$

en

$$D_1 v_2(x) = \frac{\partial}{\partial x_1}(x_1 \varphi(x)) = \varphi(x) + x_1 D_1 \varphi(x).$$

Vergelijken we dit met de gegeven conditie op φ dan zien we dat $D_2 v_1 = D_1 v_2$ op $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Er volgt dat v rotatievrij is.

(b) We parametriseren het lijnstuk van a tot ra door $\gamma(t) = ta$ met $0 \leq t \leq r$. Dan is $\gamma : [1, r] \to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ een C^1 kromme, dus

$$f(ra) - f(a) = f(\gamma(r)) - f(\gamma(1)) = \int_\gamma v(x) \cdot dx = \int_1^r \langle v(\gamma(t)) \, , \, \gamma'(t) \rangle \; dt.$$

Er geldt dat $v(\gamma(t)) = v(ta) = t\varphi(ta)(-a_2, a_1)$ en $\gamma'(t) = a$, dus

$$\langle v(\gamma(t)) \, , \, \gamma'(t) \rangle = t\varphi(ta)\langle (-a_2, a_1) \, , \, (a_1, a_2) \rangle = 0, \qquad (1 \leq t \leq r).$$

Derhalve is de bovenstaande integraal in het rechterlid nul, en het gestelde volgt.

(c) Voor $\varepsilon = \pm 1$ definiëren we de C^1-kromme $\sigma_\varepsilon : [0, \pi] \to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ door

$$\sigma_\varepsilon(t) = (\cos t, \varepsilon \sin t).$$

Beide krommen hebben beginpunt $(1, 0)$ en eindpunt $(-1, 0)$. Derhalve hebben de integralen van v langs σ_{-1} en σ_{+1} dezelfde waarde $f(-1, 0) - f(1, 0)$. De integralen stemmen dus overeen.

Anderzijds is $\sigma'_\varepsilon(t) = (-\sin t, \varepsilon \cos t)$, dus voor $t \in [0, \pi]$ geldt:

$$\begin{aligned} \langle v(\sigma_\varepsilon(t)) \, , \, \sigma'_\varepsilon(t) \rangle &= \varphi(\sigma_\varepsilon(t)) \langle (-\varepsilon \sin t, \cos t) \, , \, (-\sin t, \varepsilon \cos t) \rangle \\ &= \varphi(\sigma_\varepsilon(t))(\varepsilon \sin^2 t + \varepsilon \cos^2 t) \\ &= \varepsilon \varphi(\sigma_\varepsilon(t)). \end{aligned}$$

We concluderen dat

$$\int_{\sigma_\varepsilon} v(x) \cdot dx = \varepsilon \int_0^\pi \varphi(\sigma_\varepsilon(t)) \; dt.$$

De integraal in het rechterlid is derhalve onafhankelijk van ε. Dit is gelijkwaardig met de gestelde identiteit.