Inl. Analyse in Meer Variabelen Hertentamen 4/1 - 2021, 13:30 -16:30

- Schrijf op ieder vel **je naam** en bovendien op het eerste vel je **studentnummer** en het **aantal ingeleverde vellen**.
- **Onderteken** de verklaring op het blad aan het eind van dit tentamen, en voeg dat blad toe aan de scan van je werk.
- Geef niet alleen antwoorden, maar laat ook zien hoe je aan die antwoorden gekomen bent.
- **N.B.** Als je een stelling uit het dictaat gebruikt, vermeld dat dan en laat ook expliciet zien dat de voorwaarden van die stelling vervuld zijn.
- **N.B.** Als je een onderdeel van een opgave niet kunt maken, **ga dan toch door met de volgende onderdelen.** Je mag daarbij de in eerdere onderdelen verschafte informatie gebruiken.
- Het is een open boek tentamen: dictaat en aantekeningen mogen worden gebruikt.
- De normering per onderdeel en voor de opgave als geheel staan vermeld. Het totaal aantal te behalen punten is 40. Het tentamencijfer T wordt berekend uit de totale score S door $T = S/4$, afgerond op een geheel getal onder de zes en een veelvoud van een half boven de zes.

Succes !

10 pt totaal **Opgave 1**

3 pt (a) Toon aan dat de afbeelding $\varphi : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R},\ y \mapsto y^{-1}$ totaal differenteerbaar is, en dat voor elke $y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ geldt dat de totale afgeleide $D\varphi(y) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeven wordt door

$$D\varphi(y)(k) = -y^{-2}k, \quad (k \in \mathbb{R}).$$

3 pt (b) Gegeven zijn een open deel $U \subset \mathbb{R}^n$, een punt $a \in U$ en een afbeelding $f : U \to \mathbb{R}$ die totaal differentieerbaar is in a terwijl $f(a) \neq 0$. Toon aan dat er een $\delta > 0$ bestaat zo dat $B(a;\delta) \subset U$ en $f(B(a;\delta)) \subset \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

4 pt (c) Toon aan dat de afbeelding $g : B(a;\delta) \to \mathbb{R}$ gedefinieerd door $g(x) = 1/f(x)$ totaal differentieerbaar is in a, terwijl de totale afgeleide $Dg(a) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ gegeven wordt door

$$Dg(a)(h) = -\frac{1}{f(a)^2} Df(a)(h), \qquad (h \in \mathbb{R}^n).$$

10 pt totaal **Opgave 2** We beschouwen de functie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeven door

$$f(x,y) = x^2 + 2y^2 + 2xy - x + e^x, \qquad ((x,y) \in \mathbb{R}^2).$$

5 pt (a) Toon aan dat f precies één stationair punt heeft, namelijk $(0,0)$.

5 pt (b) Toon aan dat f precies één lokaal extreem heeft en bepaal de aard ervan (lokaal minimum of maximum).

ZOZ

10 pt totaal **Opgave 3** We beschouwen de verzameling

$$S := \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}.$$

Laat $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ gedefinieerd zijn door

$$f(x) = x_1^2 + 2bx_2 + 2bx_3.$$

Hierin is $b > 0$ een gegeven positief reëel getal met $2b^2 \geq 1$.

3 pt (a) Beargumenteer dat f op S een maximale waarde m aanneemt en dat $m > 0$.

7 pt (b) Toon aan dat f de waarde m aanneemt in een uniek punt $p \in S$ en dat $p_1 = 0$. Geef een formule die m uitdrukt in b.

10 pt totaal **Opgave 4** Gegeven is een C^1 functie $\varphi : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ die voldoet aan

$$x_1 D_1\varphi(x) + x_2 D_2\varphi(x) = -2\varphi(x), \qquad (x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}).$$

Het vectorveld v op $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ wordt gedefinieerd door:

$$v(x) = \varphi(x)(-x_2, x_1), \qquad (x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}).$$

2 pt (a) Toon aan dat het vectorveld v rotatievrij is op $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.

In het vervolg veronderstellen we dat U een open deel van $\mathbb{R}^2$ is met de eigenschap dat $0 \notin U$ en dat voor alle $a \in U$ en alle $r > 0$ geldt dat $ra \in U$. We veronderstellen voorts dat $f : U \to \mathbb{R}$ een primitieve is van v.

4 pt (b) Toon aan dat $f(ra) = f(a)$ voor alle $a \in U$ en $r \geq 1$. Hint: beschouw de integraal van v langs een geschikte kromme.

4 pt (c) Als gegeven is dat $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ bewijs dan dat

$$\int_0^\pi \varphi(\cos t, \sin t)\, dt = -\int_0^\pi \varphi(\cos t, -\sin t)\, dt.$$