Tentamen Functies en Reeksen 4 februari 2021, 11:30 – 14:30

Uitwerking

Opgave 1

(a) Voor $k \geq 1$ en $x \in [-R, R]$ geldt:

$$|f_k(x)| \leq \frac{|x^3| + k^2}{x^2 + k^4} \leq \frac{R^3 + k^2}{k^4} = \frac{(R^3/k^2) + 1}{k^2} \leq (R^3 + 1)\frac{1}{k^2}.$$

Schrijf $C = R^3 + 1$. Dan volgt dat voor alle $k \geq 1$ geldt:

$$\|f_k\|_{[-R,R]} \leq Ck^{-2}$$

De reeks $\sum_{k \geq 1} k^{-2}$ is convergent. Met het uniforme majorantie-kenmerk concluderen we dat de reeks $\sum_{k \geq 1} f_k$ absoluut uniform convergeert op $[-R, R]$.

(b) We merken op dat

$$f_k(k^2) = \frac{k^6 + k^2}{k^4 + k^4} \geq \frac{k^6}{2k^4} = k^2/2 \geq 1/2.$$

Hieruit volgt dat $\|f_k\|_{\mathbb{R}} \geq \frac{1}{2}$ voor elke $k \geq 1$. Uit de uniforme convergentie van de reeks op $\mathbb{R}$ zou volgen dat $\|f_k\|_{\mathbb{R}} \to 0$ voor $k \to \infty$, tegenspraak. Dus de reeks convergeert niet uniform op $\mathbb{R}$.

(c) Zij $a \in \mathbb{R}$. Dan bestaat er een $R > 0$ zo dat $a \in \,]-R, R[$. Uit (a) volgt dat de reeks uniform convergent is op $[-R, R]$. Hieruit volgt dat de functie $F|_{[-R,R]}$ continu is. Dus F is continu in a. Aangezien dit voor elke $a \in \mathbb{R}$ geldt concluderen we dat F continu is op $\mathbb{R}$.

Opgave 2

(a) Volgens de definitie van limiet bestaat er een $\delta > 0$ zo dat voor $z \in U \setminus \{\alpha\}$ geldt dat

$$|z - \alpha| < \delta \quad \Rightarrow \quad |(z - \alpha)f(z) - \lambda| < 1.$$

Uit de schatting in het rechterlid volgt $|(z-\alpha)f(z)| - |\lambda| < 1$, dus $|(z-\alpha)f(z)| < |\lambda| + 1$. Hieraan zien we dat voor $z \in U \setminus \{\alpha\}$ geldt:

$$|z - \alpha| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(z)| < (|\lambda| + 1)|z - \alpha|^{-1}.$$

Door $\delta > 0$ te verkleinen indien nodig bereiken we dat $\delta < R$, terwijl de bovenstaande implicatie geldig blijft.

(b) Zij $0 < r < \delta$. Dan volgt uit de theorie dat

$$c_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma_R} \frac{f(z)}{(z - \alpha)^{k+1}} \, dz.$$

Hierin is σ_r de standaardparametrisering van $\partial D(\alpha; r)$. Voor $z \in \partial D(\alpha; r)$ geldt

$$\left|\frac{f(z)}{(z-\alpha)^{k+1}}\right| \leq (|\lambda|+1)|z-\alpha|^{-1}|z-\alpha|^{-k-1} = (|\lambda|+1)\, r^{-k-2}.$$

Hieruit concluderen we met de bekende schatting van de integraal dat

$$|c_k| \leq \frac{1}{2\pi} L(\sigma_r)(|\lambda|+1)\, r^{-k-2}$$

met $L(\sigma_r)$ de lengte van σ_r. Deze lengte is $2\pi r$ en de gewenste schatting volgt.

(c) Voor $k < -1$ geldt dat $0 < -k-1$ dus $\lim_{r\to 0} r^{-k-1} = 0$. Door toepassing van de insluistelling volgt nu dat $c_k = 0$. We concluderen dat voor $z \in D(\alpha; R) \setminus \{\alpha\}$ geldt dat

$$(z-\alpha)f(z) = \sum_{k=-1}^{\infty} c_k (z-\alpha)^{k+1} = \sum_{n=0}^{\infty} c_{n-1}(z-\alpha)^n.$$

De machtreeks in het laatste lid is convergent op $D(\alpha; R)\setminus\{\alpha\}$ dus heeft convergentiestraal $\geq R$ en definieert een continue functie $g : D(\alpha; R) \to \mathbb{C}$ met $g(0) = c_{0-1} = c_{-1}$. Er volgt dat

$$\lambda = \lim_{z\to\alpha}(z-\alpha)f(z) = \lim_{z\to\alpha} g(z) = g(0) = c_{-1}.$$

Per definitie geldt dat $\mathrm{Res}_\alpha f = c_{-1}$, dus het resultaat volgt.

Opgave 3

(a) Uit

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{(z-i)(z+i)(z-2i)(z+2i)}$$

volgt dat de collectie singuliere punten gelijk is aan $\{i, 2i, -i, -2i\}$. Hiervan hebben precies $\alpha_1 = i$ en $\alpha_2 = 2i$ een positief imaginair deel. Uit de bovenstaande formule blijkt dat f zowel in α_1 als in α_2 eerste orde polen heeft. Immers voor $j = 1, 2$ geldt dat $f(z) = (z-\alpha_j)g_j(z)$ met g_j holomorf in een omgeving van α_j en $g(\alpha_j) \neq 0$.

(b) Uit het feit dat de polen van eerste orde zijn volgt dat

$$\mathrm{Res}_i f = \lim_{z\to i}(z-i)f(z) = \frac{e^{-1}}{2i(-1+4)} = -ie^{-1}/6.$$

Evenzo

$$\mathrm{Res}_{2i} f = \lim_{z\to 2i}(z-2i)f(z) = \frac{e^{-2}}{(-4+1)(2i+2i)} = ie^{-2}/12.$$

Door optellen volgt het gevraagde resultaat.

(c) Zij $R > 2$. Voor z in het beeld van τ_R geldt $\operatorname{Im} z \geq 0$ en $|z| = R$. Hieruit volgt dat $|z^2+1| \geq |z|^2 - 1 = R^2 - 1 > 0$ en $|z^2+4| \geq |z|^2 - 4 = R^2 - 4 > 0$ dus

$$\left|\frac{e^{iz}}{(z^2+1)(z^2+4)}\right| \leq \frac{e^{-\operatorname{Im} z}}{(R^2-1)(R^2-4)} \leq \frac{1}{(R^2-1)(R^2-4)}.$$

Combineren we deze schatting met de observatie dat de lengte van τ_R gelijk is aan πR dan vinden we dat

$$\left|\int_{\tau_R} f(z)\, dz\right| \leq \pi \frac{R}{(R^2-1)(R^2-4)} = \frac{\pi}{R^3} \frac{1}{(1-R^{-2})(1-4R^{-2})}.$$

Het rechterlid heeft limiet 0 voor $R \to \infty$ dus met de insluitstelling concluderen we dat het linkerlid limiet nul heeft. Met de definitie van limiet volgt nu het gewenste resultaat.

(d) Zij weer $R > 2$. Dan definiëren we de kromme $k_R : [-R, R] \to \mathbb{C}$ door $k_R(x) = x$. Dan is

$$\int_{k_R} f(z)\, dz = \int_{-R}^{R} \frac{e^{ix}}{(x^2+1)(x^2+4)}\, dx.$$

Zij γ_R een gesloten kromme die ontstaat door (richtingsbehoudend) herparametriseren en aan elkaar plakken van k_R en τ_R, dan heeft γ_R windingsgetal 1 rond de punten i en $2i$. Bovendien is γ_R samentrekbaar in de open verzameling $\mathbb{C} \setminus \{-i, -2i\}$, waaruit volgt dat

$$\int_{\gamma_R} f(z)\, dz = 2\pi i(\operatorname{Res}_i f + \operatorname{Res}_{2i} f) = \frac{\pi}{6}(2e^{-1} - e^{-2})$$

voor alle $R > 2$. Door het linkerlid te schrijven als integraal over k_R plus integraal over τ_R en de limiet voor $R \to \infty$ te nemen volgt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{(x^2+1)(x^2+4)}\, dx = \frac{\pi}{6}(2e^{-1} - e^{-2}).$$

Door links en rechts het reële deel te nemen vinden we dat

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{(x^2+1)(x^2+4)}\, dx = \frac{\pi}{6}(2e^{-1} - e^{-2}).$$

Opgave 4

(a) Er geldt dat

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(x) e^{-ikx}\, dx$$

(voor de functie φ is het interval $[0, 2\pi]$ handiger dan $[-\pi, \pi]$). Voor $k = 0$ geeft dit

$$c_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} x\, dx = \frac{1}{4\pi} x^2 \Big|_0^{2\pi} = \frac{4\pi^2}{4\pi} = \pi.$$

Voor $k \neq 0$ vinden we

$$\begin{aligned}
2\pi c_k &= \int_0^{\pi} x \, \frac{d}{dx}\left(\frac{e^{-ikx}}{-ik}\right) \, dx \\
&= \frac{xe^{-ikx}}{-ik}\bigg|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \frac{e^{-ikx}}{-ik} \, dx \\
&= 2\pi \frac{i}{k} - 0.
\end{aligned}$$

Hieruit volgt het gevraagde.

(b) Er geldt dat $\varphi \in C^{\mathrm{st},1}(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$. Uit de theorie volgt dat de rij $s_n(\varphi)$ van symmetrische partiële Fourier-sommen puntsgewijs convergent is op $\mathbb{R}$. Zij $s : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ de limietfunctie, dan is

$$s(x) = \frac{1}{2}(\varphi(x+) + \varphi(x-)).$$

Het is evident dat s een 2π-periodieke functie is. De functie φ is continu in alle punten van $]0, 2\pi[$, dus $s = \varphi$ op $]0, 2\pi[$. Er geldt dat $\varphi(0+) = 0$, terwijl

$$\varphi(0-) = \lim_{x \uparrow 0} \varphi(x) = \lim_{x \uparrow 0} \varphi(x + 2\pi) = \varphi(2\pi-) = 2\pi.$$

Dus $s(0) = \pi$.

De symmetrische partiële som wordt gegeven door

$$\begin{aligned}
s_n(\varphi)(x) &= \sum_{|k| \le n} c_k e^{ikx} \\
&= c_0 + \sum_{k=1}^{n} (c_k e^{ikx} + c_{-k} e^{-ikx}) \\
&= \pi + \sum_{k=1}^{n} (\frac{-2}{k}) \sin kx.
\end{aligned}$$

Hieruit volgt dat

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin kx}{k} = \frac{1}{2}(\pi - s_n(\varphi)(x)).$$

Voor $n \to \infty$ heeft het rechterlid de limiet $(\pi - s(x))/2$ en we concluderen dat de reeks puntsgewijs convergent is met somfunctie

$$g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k} = \frac{\pi - s(x)}{2}.$$

Hieruit volgt dat $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ de 2π-perodieke functie is die bepaald wordt door $g(0) = 0$ en

$$g(x) = \frac{\pi - x}{2}, \qquad (0 < x < 2\pi).$$