Tentamen Functies en Reeksen 4 februari 2021, 11:30 – 14:30

- Schrijf op ieder vel **je naam** en bovendien op het eerste vel je **studentnummer** en het **aantal ingeleverde vellen**.
- Geef niet alleen antwoorden, maar laat ook zien hoe je aan die antwoorden gekomen bent.
- **N.B.** Als je een stelling uit het dictaat gebruikt, vermeld dat dan en laat ook expliciet zien dat de voorwaarden van die stelling vervuld zijn.
- **N.B.** Als je een onderdeel van een opgave niet kunt maken, **ga dan toch door met de volgende onderdelen.** Je mag daarbij de in eerdere onderdelen verschafte informatie gebruiken.
- Dit is een open boek tentamen, diktaat en aantekeningen mogen worden gebruikt.
- De normering per onderdeel en voor de opgave als geheel staan vermeld. Het totaal aantal te behalen punten is 40. Het tentamencijfer wordt bepaald door het totaal aantal punten gedeeld door 4, uitgerekend in 1 decimaal nauwkeurig.

Succes !

10 pt totaal **Opgave 1** We beschouwen de functies $f_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, voor $k \geq 1$, gedefinieerd door

$$f_k(x) = \frac{x^3 + k^2}{x^2 + k^4}, \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

4 pt (a) Toon aan dat de reeks $\sum_{k\geq 1} f_k$ absoluut uniform convergeert op ieder interval $[-R, R]$, met $R > 0$.

3 pt (b) Toon aan dat de reeks $\sum_{k\geq 1} f_k$ niet uniform convergeert op $\mathbb{R}$.

3 pt (c) Toon aan dat door

$$F(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x), \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

een continue functie $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ wordt gedefinieerd.

10 pt totaal **Opgave 2** Gegeven zijn een open verzameling $U \subset \mathbb{C}$, een punt $\alpha \in U$ en een holomorfe functie $f : U \setminus \{\alpha\} \to \mathbb{C}$. Laat $R > 0$ zo zijn dat $D(\alpha; R) \subset U$. Uit de theorie is bekend dat er complexe coëfficiënten $c_k \in \mathbb{C}$ bestaan, voor $k \in \mathbb{Z}$, zo dat

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k (z-\alpha)^k, \qquad (z \in D(\alpha; R) \setminus \{\alpha\}).$$

3 pt (a) Veronderstel dat $\lim_{z\to\alpha}(z-\alpha)f(z) = \lambda$ voor een geschikte $\lambda \in \mathbb{C}$. Toon aan dat er een $\delta > 0$ bestaat met $\delta < R$ en

$$|f(z)| \leq (|\lambda| + 1)|z-\alpha|^{-1} \qquad \text{voor alle} \quad z \in D(\alpha; \delta) \setminus \{\alpha\}.$$

3 pt (b) Toon aan dat voor alle $k \in \mathbb{Z}$ en alle $0 < r < \delta$ geldt dat $|c_k| \leq (|\lambda| + 1) r^{-k-1}$.

4 pt (c) Bewijs dat $c_k = 0$ voor $k < -1$ en dat $\mathrm{Res}_\alpha f = \lambda$.

ZOZ

12 pt totaal **Opgave 3** We beschouwen de complexe functie f gegeven door de formule

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{(z^2+1)(z^2+4)}.$$

2 pt (a) Toon aan dat de functie f precies twee singuliere punten α_1 en α_2 in $\mathbb{C}$ heeft met $\mathrm{Im}\,(\alpha_j) > 0$, $(j = 1, 2)$. Toon aan dat f in elk van deze punten een pool van eerste orde heeft.

3 pt (b) Bewijs dat

$$\mathrm{Res}_{\alpha_1} f + \mathrm{Res}_{\alpha_2} f = -\frac{i}{12}(2e^{-1} - e^{-2}).$$

3 pt (c) Voor $R > 0$ definiëren we $\tau_R : [0, \pi] \to \mathbb{C}$ door $\tau_R(t) = Re^{it}$. Toon aan dat

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\tau_R} f(z)\, dz = 0.$$

4 pt (d) Bereken de integraal

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{(x^2+1)(x^2+4)}\, dx.$$

door gebruik te maken van (a), (b), (c) en de residuenstelling.

8 pt totaal **Opgave 4** We beschouwen de 2π-periodieke functie $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ die op $[0, 2\pi[$ gedefinieerd is door $\varphi(x) = x$.

4 pt (a) Bepaal de Fourier-coëfficiënt $c_0 = (\mathcal{F}\varphi)_0$. Toon aan dat de Fourier-coëfficiënten $c_k = \mathcal{F}(\varphi)_k$ voor $k \neq 0$ gegeven worden door

$$c_k = \frac{i}{k}, \qquad (k \neq 0).$$

4 pt (b) Beargumenteer dat de reeks

$$\sum_{k\geq 1} \frac{\sin kx}{k}$$

puntsgewijs convergeert op $\mathbb{R}$ en geef een eenvoudige expliciete beschrijving van de somfunctie g.