Herkansing Functies en Reeksen, 20/4-2021. Uitwerking

Opgave 1

(a) Zij $k \geq 2N$. Voor $x \geq -N$ geldt dat $x + k \geq -N + k \geq k/2$, dus $(x + k)^2 \geq k^2/4$, dus $|f_k(x)| \leq e^{-k^2}$. Hieruit volgt het gestelde.

(b) Voor $k \geq 2N$ geldt dat $\|f_k\|_{[-N,\infty[} \leq e^{-k^2} \leq e^{-k} = (1/e)^k$, terwijl de meetkundige reeks $\sum_k (1/e)^k$ convergeert omdat $0 < 1/e < 1$. Met het majorantie-criterium volgt dat de reeks $\sum_k f_k$ uniform absoluut convergeert.

(c) Er geldt dat $f_k(-k) = 1$, dus $\|f_k\|_{\mathbb{R}} \geq 1$. Hieruit volgt dat niet geldt $\|f_k\|_{\mathbb{R}} \to 0$ voor $k \to \infty$. De reeks is derhalve niet uniform convergent op $\mathbb{R}$.

(d) Zij $x_0 \in \mathbb{R}$ en kies $N \in \mathbb{N}$ zo dat $-N < x_0$. Dan convergeert de reeks voor F uniform op $[-N, \infty[$, terwijl de functies f_k continu zijn. Dus $F|_{[-N,\infty[}$ is continu. Hieruit volgt dat F continu is in x_0. Aangezien dit geldt voor iedere x_0 is F continu op $\mathbb{R}$.

Opgave 2

(a) We gebruiken de integraalformule

$$f'(0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma_R} \frac{f(z)}{z^2}\, dz,$$

met σ_R de standaardparametrisering van de cirkel rond 0 met straal R. Dan levert de standaard manier van schatten dat

$$|f'(0)| \leq (2\pi)^{-1} L(\sigma_R) \sup_{|z|=R} |f(z)|/R^2 = \frac{1 + R^2}{R}.$$

Kiezen we $R = 1$ dan vinden we de gewenste schatting.

(b) De functie f heeft een machtreeksontwikkeling van de vorm $\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ op $\mathbb{C}$. Met behulp van de Cauchy ongelijkheden kunnen de coëfficiënten geschat worden door

$$|c_k| \leq \frac{1 + R^2}{R^k}$$

Alternatief wordt deze schatting gevonden uit

$$c_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma_R} \frac{f(z)}{z^{k+1}}\, dk.$$

Voor $k \geq 3$ volgt dat $|c_k| \leq R^{-3} + R^{-1}$. Aangezien het rechterlid van deze schatting naar nul gaat voor $R \to \infty$ volgt dat $c_k = 0$ voor $k \geq 3$. Hieruit blijkt het gestelde.

Verder volgt $|a| = |f(0)| \leq 1 + 0 = 1$ en (door (a) te gebruiken) $|b| = |f'(0)| \leq 2$.

(c) We kunnen wederom de Cauchy ongelijkheid of de integraalformule toepassen. Alternatief kunnen we ook als volgt redeneren. Voor alle $z \in \mathbb{C}$ geldt

$$|a + bz + cz^2| \leq 1 + |z|^2,$$

dus als $z \neq 0$ dan

$$|az^{-2} + bz^{-1} + c| \leq |z|^{-2} + 1.$$

Nemen we de limiet voor $|z| \to \infty$, dan convergeert het linkerlid naar $|c|$ en het rechter naar 1. We concluderen dat $|c| \leq 1$.

Opgave 3

(a) Uit

$$f(z) = \frac{ze^{iz}}{(z-i)(z+i)(z-2i)(z+2i)}$$

volgt dat de collectie singuliere punten gelijk is aan $\{i, 2i, -i, -2i\}$. Hiervan hebben precies $\alpha_1 = i$ en $\alpha_2 = 2i$ een positief imaginair deel. Uit de bovenstaande formule blijkt dat f zowel in α_1 als in α_2 eerste orde polen heeft.

(b) Uit het feit dat de polen van eerste orde zijn volgt dat

$$\mathrm{Res}_i f = \lim_{z \to i} (z-i) f(z) = \frac{ie^{-1}}{2i(-1+4)} = e^{-1}/6.$$

Evenzo

$$\mathrm{Res}_{2i} f = \lim_{z \to 2i} (z-2i) f(z) = \frac{2ie^{-2}}{(-4+1)(2i+2i)} = -e^{-2}/6.$$

Door optellen volgt het gevraagde resultaat.

(c) Zij $R > 2$. Voor z in het beeld van τ_R geldt $\operatorname{Im} z \geq 0$ en $|z| = R$. Hieruit volgt dat $|z^2+1| \geq |z|^2 - 1 = R^2 - 1 > 0$ en $|z^2+4| \geq |z|^2 - 4 = R^2 - 4 > 0$ dus

$$\left| \frac{ze^{iz}}{(z^2+1)(z^2+4)} \right| \leq \frac{Re^{-\operatorname{Im} z}}{(R^2-1)(R^2-4)} \leq \frac{R}{(R^2-1)(R^2-4)}.$$

Combineren we deze schatting met de observatie dat de lengte van τ_R gelijk is aan πR dan vinden we dat

$$\left| \int_{\tau_R} f(z)\, dz \right| \leq \pi \frac{R^2}{(R^2-1)(R^2-4)} = \frac{\pi}{R^2} \frac{1}{(1-R^{-2})(1-4R^{-2})}.$$

Het rechterlid heeft limiet 0 voor $R \to \infty$ dus met de insluitstelling concluderen we het gewenste resultaat.

(d) Zij weer $R > 2$. Dan definiëren we de kromme $k_R : [-R, R] \to \mathbb{C}$ door $k_R(x) = x$. Dan is

$$\int_{k_R} f(z)\, dz = \int_{-R}^{R} \frac{xe^{ix}}{(x^2+1)(x^2+4)}\, dx.$$

Zij γ_R een gesloten kromme die ontstaat door (richtingsbehoudend) herparametriseren en aan elkaar plakken van k_R en τ_R, dan heeft γ_R windingsgetal 1 rond de punten i en $2i$. Bovendien is γ_R samentrekbaar in de open verzameling $\mathbb{C} \setminus \{-i, -2i\}$, waaruit volgt dat

$$\int_{\gamma_R} f(z)\, dz = 2\pi i(\mathrm{Res}_i f + \mathrm{Res}_{2i} f) = \frac{\pi i}{3}(e^{-1} - e^{-2})$$

voor alle $R > 2$. Door het linkerlid te schrijven is als integraal over k_R plus integraal over τ_R en de limiet voor $R \to \infty$ te nemen volgt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{xe^{ix}}{(x^2+1)(x^2+4)}\, dx = \frac{\pi i}{3}(e^{-1} - e^{-2}).$$

Door links en rechts het imaginaire deel te nemen vinden we dat

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin x}{(x^2+1)(x^2+4)}\, dx = \frac{\pi}{3}(e^{-1} - e^{-2}).$$

Opgave 4

(a) Er geldt dat

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{(a-ik)x}\, dx = \frac{1}{2\pi} \frac{e^{(a-ik)x}}{a-ik}\bigg|_0^{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \frac{e^{2a\pi} - 1}{a - ik}.$$

(b) Aangezien φ stuksgewijs C^1 is geldt de Parseval identiteit:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\varphi(x)|^2\, dx = \sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_k|^2.$$

Het linkerlid is gelijk aan:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2} \pi e^{2ax}\, dx = \frac{1}{2\pi} \frac{e^{2ax}}{2a}\bigg|_0^{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \frac{e^{4a\pi} - 1}{2a}.$$

Voor het rechterlid berekenen we

$$|c_k|^2 = \frac{1}{4\pi^2}(e^{2a\pi} - 1)^2 \frac{1}{|a - ik|^2} = \frac{1}{4\pi^2}(e^{2a\pi} - 1)^2 \frac{1}{a^2 + k^2}.$$

Combineren we deze berekeningen dan vinden we

$$\frac{1}{2\pi} \frac{e^{4a\pi} - 1}{2a} = \frac{1}{4\pi^2}(e^{2a\pi} - 1)^2 \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{1}{a^2 + k^2}.$$

Door gebruik te maken van $e^{4a\pi} - 1 = (e^{2a\pi} - 1)(e^{2a\pi} + 1)$ leiden we hieruit de gevraagde identiteit af.