Inleiding Kansrekening en Statistiek (WISB 161)
Hertentamen

Sjoerd Dirksen

22 april 2021, 11:30-14:30

Dit tentamen bestaat uit 5 vragen, die in totaal 45 punten waard zijn. Schrijf op elk ingeleverd blad jouw naam en studentnummer en nummer de pagina's. Voorzie elk antwoord van een zorgvuldige motivatie. Vereenvoudig jouw antwoorden voor zover mogelijk. Je mag gebruik maken van de tabel aan het einde van het tentamen.

Vraag 1 [9 punten]

Albert wordt aangeklaagd voor de moord op een dorpsgenoot. Op het moordwapen wordt bloed van de dader aangetroffen. Het aangetroffen bloed is van groep O, de bloedgroep van Albert, maar verder is er geen bewijs dat Albert de dader is. Uit het archief van het lokale ziekenhuis is bekend dat in het dorp 11 personen met bloedgroep O, 13 met bloedgroep A, 10 met bloedgroep B en 7 met bloedgroep AB wonen. De rechter die de zaak behandelt is niet vooringenomen en neemt aan dat de dader in het dorp woont. Met welke kans acht de rechter Albert schuldig op basis van het aanwezige bewijsmateriaal?

Uitwerking:

Zij O de gebeurtenis dat het aangetroffen bloed van groep O is en S de gebeurtenis dat Albert schuldig is. Aangezien Albert bloedgroep O heeft geldt $\mathbb{P}(O|S) = 1$. Van de 41 dorpsbewoners (we gaan er hier van uit dat het slachtoffer niet meer in het archief staat en de rechter niet in het dorp woont) hebben er 11 bloedgroep O, dus $\mathbb{P}(O) = \frac{11}{41}$. Tenslotte is de rechter niet vooringenomen en neemt aan dat de dader in het dorp woont, dus de a-priori kans dat deze Albert schuldig acht is $\mathbb{P}(S) = \frac{1}{41}$. Uit de stelling van Bayes volgt nu dat de kans dat Albert schuldig is, gegeven het feit dat het bloed op het moordwapen van groep O is, gelijk aan

$$\mathbb{P}(S|O) = \frac{\mathbb{P}(O|S)\mathbb{P}(S)}{\mathbb{P}(O)} = \frac{1 \cdot \frac{1}{41}}{\frac{11}{41}} = \frac{1}{11}.$$

Vraag 2 [9 punten]

Zij $n \in \mathbb{N}$. Augusto gooit n keer een munt op die met kans p op kop landt. Zij

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{als worp } i \text{ eindigt in kop} \\ 0 & \text{als worp } i \text{ eindigt in munt.} \end{cases}$$

Zij $W_n = \max\{X_1, \ldots, X_n\}$ en $Z_n = \min\{X_1, \ldots, X_n\}$. Laat zien dat

$$\mathrm{Cov}(W_n, Z_n) = (p(1-p))^n.$$

Uitwerking:

Merk op dat dat W_n, Z_n en W_nZ_n de waarden 0 en 1 kunnen aannemen. Bovendien is

$$W_n = \max\{X_1, \ldots, X_n\} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad X_i = 0, \text{ voor alle } 1 \leq i \leq n$$

en dus geldt

$$1 - \mathbb{P}(W_n = 1) = \mathbb{P}(W_n = 0) = \mathbb{P}(X_1 = 0, \ldots, X_n = 0) = (1-p)^n.$$

Op dezelfde manier zien we dat

$$Z_n = \min\{X_1, \ldots, X_n\} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad X_i = 1, \text{ voor alle } 1 \leq i \leq n$$

en dus geldt

$$1 - \mathbb{P}(Z_n = 0) = \mathbb{P}(Z_n = 1) = \mathbb{P}(X_1 = 1, \ldots, X_n = 1) = p^n.$$

Tenslotte geldt

$$W_nZ_n = 1 \Leftrightarrow Z_n = W_n = 1 \Leftrightarrow Z_n = 1$$

en dus

$$1 - \mathbb{P}(W_nZ_n = 0) = \mathbb{P}(W_nZ_n = 1) = \mathbb{P}(Z_n = 1) = p^n.$$

Hieruit volgt

$$\text{Cov}(W_n, Z_n) = \mathbb{E}(W_nZ_n) - \mathbb{E}(W_n)\mathbb{E}(Z_n) = p^n - p^n[1 - (1-p)^n] = [p(1-p)]^n.$$

Vraag 3 [9 punten]

Michael en Barney gaan elke avond darten in het café op de hoek. Door de week spelen ze elke avond 4 potjes en in het weekend elke avond 8 potjes. Michael kan veel beter darten dan Barney: hij wint een potje met kans $\frac{5}{6}$. We gaan er van uit dat de uitkomsten van de verschillende potjes elkaar niet beïnvloeden. Gebruik een normale benadering om een benadering te geven van de kans dat Barney in een week vaker wint dan Michael. Druk jouw antwoord uit in termen van de verdelingsfunctie van de standaard normale verdeling.

Uitwerking:

Zij

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{als Michael wint} \\ 0 & \text{als Barney wint.} \end{cases}$$

De X_i zijn onafhankelijk en Bernoulli verdeeld met parameter $p = \frac{5}{6}$. Er worden $n = 36$ potjes gespeeld en het aantal potjes dat Michael wint is $\sum_{i=1}^{36} X_i$. De kans dat Barney vaker wint is

$$\mathbb{P}\Big(\sum_{i=1}^{36} X_i \leq 17\Big).$$

Aangezien de X_i onafhankelijk en identiek verdeeld zijn met $\mathbb{E}(X_i) = p$ en $\text{Var}(X_i) =$

$p(1-p)$, volgt uit centrale limietstelling dat voor elke $z \in \mathbb{R}$ geldt

$$\mathbb{P}(Z_n \leq z) \to \mathbb{P}(Z \leq z)$$

als $n \to \infty$, waarbij

$$Z_n = \frac{\sum_{i=1}^n X_i - np}{\sqrt{p(1-p)}\sqrt{n}}$$

en $Z \sim \mathrm{N}(0,1)$. We gebruiken daarom als normale benadering

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\Big(\sum_{i=1}^n X_i \leq x\Big) &= \mathbb{P}\Big(Z_n \leq \frac{x-np}{\sqrt{p(1-p)}\sqrt{n}}\Big)\\ &\approx \mathbb{P}\Big(Z \leq \frac{x-np}{\sqrt{p(1-p)}\sqrt{n}}\Big).\end{aligned}$$

In dit geval is $n = 36$, $p = \frac{5}{6}$ en $x = 17$, dus we vinden de normale benadering

$$\mathbb{P}\Big(\sum_{i=1}^{36} X_i \leq 17\Big) \approx \mathbb{P}\left(Z \leq \frac{17 - 36\frac{5}{6}}{\sqrt{\frac{5}{6}\frac{1}{6}}\sqrt{36}}\right) = \mathbb{P}\Big(Z \leq \frac{-13}{\sqrt{5}}\Big).$$

Vraag 4 [9 punten]

Zij X een continue kansvariabele waarvan bekend is dat zijn kansdichtheid wordt gegeven door

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{2x}{(\theta^*)^2} & \text{als } 0 < x \leq \theta^*, \\ 0 & \text{elders} \end{cases}$$

waarbij $\theta^* > 0$ een onbekende parameter is. Zij $X_1, \ldots, X_n$ een onafhankelijke steekproef uit de verdeling van X. Bepaal een meest aannemelijke schatter van θ^* op basis van deze steekproef.

Uitwerking:

Zij $x_1, \ldots, x_n$ een realisatie van $X_1, \ldots, X_n$. De aannemelijkheid wordt gegeven door

$$\begin{aligned}L(\theta|x_1,\ldots,x_n) &= \prod_{i=1}^n f_{X_i}(x_i|\theta) = \prod_{i=1}^n \frac{2x_i}{\theta^2} 1_{(0,\theta]}(x_i)\\ &= \prod_{i=1}^n \frac{2x_i}{\theta^2} 1_{[x_i,\infty)}(\theta) = \begin{cases} \frac{2^n}{\theta^{2n}}\Big(\prod_{i=1}^n x_i\Big) & \text{als } \theta \geq \max_{1\leq i\leq n} x_i \\ 0 & \text{elders}\end{cases}\end{aligned}$$

Merk op dat de functie

$$\theta \mapsto \frac{2^n}{\theta^{2n}}\Big(\prod_{i=1}^n x_i\Big)$$

positief en monotoon dalend is op $(0,\infty)$. Hieruit volgt dat $\hat{\theta}(x_1,\ldots,x_n) = \max_{1\leq i\leq n} x_i$ de aannemelijkheidsfunctie maximaliseert. We concluderen dat

$$\hat{\theta}(X_1,\ldots,X_n) = \max_{1\leq i\leq n} X_i$$

de meest aannemelijke schatter van θ^* is.

Vraag 5 [9 punten]

Zij

$$A = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x_1^2 + x_2^2 \leq 1, x_1 \geq 0\} \subset \mathbb{R}^2.$$

Zij (X_1, X_2) een continue kansvector die uniform verdeeld is in A. Bereken $\mathbb{P}(X_1 + X_2 \geq 1)$.

Hint: teken eerst een plaatje van A.

Uitwerking:

We bepalen eerst de kansdichtheid van (X_1, X_2). Merk op dat A de rechterhelft van de eenheidsschijf is. De oppervlakte van A is daarom $\frac{\pi}{2}$ en daarom is

$$f_{X_1,X_2}(x_1, x_2) = \frac{1}{\mathrm{Vol}(A)} 1_A(x_1, x_2) = \frac{2}{\pi} 1_A(x_1, x_2).$$

De gevraagde kans $\mathbb{P}(X_1 + X_2 \geq 1)$ is de kans dat (X_1, X_2) in het gebied

$$B := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x_1^2 + x_2^2 \leq 1, x_1 \geq 0, \ x_1 + x_2 \geq 1\}.$$

Met behulp van een plaatje zien we dat $A \setminus B$ bestaat uit de driehoek met hoekpunten $(0,0)$, $(1,0)$ en $(0,1)$ en de onderste helft van de halfcirkel A. De oppervlakte van $A \setminus B$ is daarom $\frac{1}{2} + \frac{\pi}{4}$. We vinden nu

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_1 + X_2 \geq 1) &= 1 - \mathbb{P}((X_1, X_2) \in A \setminus B) \\
&= 1 - \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{X_1,X_2}(x_1, x_2) 1_{A \setminus B}(x_1, x_2) \, dx_1 dx_2 \\
&= 1 - \frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = 1 - \frac{1}{\pi} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}.
\end{aligned}$$

Een aantal belangrijke kansverdelingen

Discrete kansverdelingen

Naam	Kansfunctie	Verwachtingswaarde	Variantie
$\mathrm{Ber}(p)$	$\mathbb{P}(X = 1) = p = 1 - \mathbb{P}(X = 0)$	p	$p(1-p)$
$\mathrm{Binom}(n, p)$	$\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \ k = 0, \ldots, n$	np	$np(1-p)$
$\mathrm{Geom}(p)$	$\mathbb{P}(X = k) = p(1-p)^{k-1}, \ k \in \mathbb{N}$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$
$\mathrm{Pois}(\lambda)$	$\mathbb{P}(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}, \ k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$	λ	λ

Continue verdelingen

Naam	Kansdichtheid	Verwachtingswaarde	Variantie
$\mathrm{Unif}(a, b)$	$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{als } a < x < b \\ 0 & \text{elders} \end{cases}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
$\mathrm{Exp}(\lambda)$	$f(x) = \begin{cases} \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x} & \text{als } x > 0 \\ 0 & \text{elders} \end{cases}$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$
$\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$	$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp(-(x-\mu)^2/(2\sigma^2))$	μ	σ^2