Uitwerkingen
Tentamen WISB141 Inleiding Meetkunde

vrijdag 9 juli 2021 15:15–18:15

1. Laat ons de notaties $D_1 = d_{\mathbb{E}^2}(\mathbf{a}, \mathbf{c}) + d_{\mathbb{E}^2}(\mathbf{c}, \mathbf{b})$ en $D_2 = d_{\mathbb{E}^2}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ introduceren. We kunnen de volgende gevallen onderscheiden en de uitdrukkingen betrokken bij de driehoeksongelijkheid in elk geval uitwerken.

$\mathbf{a}$	$\mathbf{b}$	$\mathbf{c}$	$d(\mathbf{a}, \mathbf{c}) + d(\mathbf{c}, \mathbf{b})$	$d(\mathbf{a}, \mathbf{b})$
$\neq \mathbf{0}$	$\neq \mathbf{0}$	$\neq \mathbf{0}$	D_1	D_2
$= \mathbf{0}$	$\neq \mathbf{0}$	$\neq \mathbf{0}$	$D_1 + 1$	$D_2 + 1$
$\neq \mathbf{0}$	$= \mathbf{0}$	$\neq \mathbf{0}$	$D_1 + 1$	$D_2 + 1$
$\neq \mathbf{0}$	$\neq \mathbf{0}$	$= \mathbf{0}$	$D_1 + 1 + 1$	D_2
$= \mathbf{0}$	$= \mathbf{0}$	$\neq \mathbf{0}$	$D_1 + 1 + 1$	D_2
$= \mathbf{0}$	$\neq \mathbf{0}$	$= \mathbf{0}$	$D_1 + 1$	$D_2 + 1$
$\neq \mathbf{0}$	$= \mathbf{0}$	$= \mathbf{0}$	$D_1 + 1$	$D_2 + 1$
$= \mathbf{0}$	$= \mathbf{0}$	$= \mathbf{0}$	D_1	D_2

We weten dat $D_1 \geq D_2$ in elk geval omdat de driehoeksongelijkheid geldt voor $d_{\mathbb{E}^2}$. Dus zien we dat in elk geval van de bovenstaande tabel geldt de driehoeksongelijkheid $d(\mathbf{a}, \mathbf{c}) + d(\mathbf{c}, \mathbf{b}) \geq d(\mathbf{a}, \mathbf{b})$. Omdat deze gevallen alle mogelijke $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ bevatten, voldoet d dus aan de driehoeksongelijkheid.

2. (a) Stel dat $P \in \ell_2'$. Dan is $\mathrm{Sp}_{\ell_1}(P) \in \ell_2$, want ℓ_2 zijn per definitie de punten die op ℓ_2' worden afgebeeld door Sp_{ℓ_1}. Dat betekent dat $\mathrm{Sp}_{\ell_2} \circ \mathrm{Sp}_{\ell_1}(P) = \mathrm{Sp}_{\ell_1}(P) \in \ell_2$, want Sp_{ℓ_2} laten de elementen van ℓ_2 onveranderd. Dus is $\mathrm{Sp}_{\ell_1} \circ \mathrm{Sp}_{\ell_2} \circ \mathrm{Sp}_{\ell_1}(P) = \mathrm{Sp}_{\ell_1} \circ \mathrm{Sp}_{\ell_1}(P)$ en dus gelijk aan P omdat $\mathrm{Sp}_{\ell_1} \circ \mathrm{Sp}_{\ell_1}$ de identiteitstransformatie is.

   (b) $T = \mathrm{Sp}_{\ell_1} \circ \mathrm{Sp}_{\ell_2} \circ \mathrm{Sp}_{\ell_1}$ is een isometrie die alle punten op een lijn (ℓ_2') onveranderd laten. Daardoor is T of en spiegeling in die lijn of de identiteitstransformatie. Omdat T de samenstelling is van drie indirecte isometrieen moet T ook indirect zijn. De identiteitstransformatie is een directe isometrie, dus T kan alleen $\mathrm{Sp}_{\ell_2'}$ zijn.

3. Een rotatie met deze eigenschappen bestaat wel. Bij voorbeeld kunnen we A de middelpunt $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0)$ van de boog PQ laten zijn, en $\varphi = \pi$ kiezen. Dan krijgen we $\mathrm{Rot}_{A,\varphi}(P) = Q$ omdat $d(P, A) = d(A, Q)$ en $\varphi = \angle PAQ$.

4. (a) De voorwaarden om een Lorentzbasis te zijn zijn $\mathbf{b}_2 \cdot_L \mathbf{b}_0 = 0$, $\mathbf{b}_2 \cdot_L \mathbf{b}_1 = 0$, en $\mathbf{b}_2 \cdot_L \mathbf{b}_2 = 1$. Als we $\mathbf{b}_2 = (t, x, y)$ schrijft worden deze $-\sqrt{2}t + x = 0$, $y = 0$, en $-t^2 + x^2 + y^2 = 1$. Deze voorwaarden zijn voldaan door $\mathbf{b}_2 = (1, \sqrt{2}, 0)$.

   (b) $\mathbf{b}_0$. De lijn ℓ is de groothyperbool bepaald door het vlak V opgespannen door $\mathbf{b}_0$, $\mathbf{b}_1$. Het punt $\bar{\mathbf{o}}$ ligt niet in deze vlak en dus niet op ℓ. Het punt $\mathbf{b}_1$ ligt wel in het vlak V maar niet op de hyperboloïde $\mathcal{H}^2$, dus ook niet op ℓ. Het punt $\mathbf{b}_0$ ligt zowel in het vlak V als op de hyperboloïde $\mathcal{H}^2$ (want $\mathbf{b}_0 \cdot_L \mathbf{b}_0 = -1$); dus $\mathbf{b}_0 \in \ell$.

5. Merk op dat $C = 2A - B$. Dat wil zeggen C is een affien-lineair combinatie van A en B. Affiene transformaties bewaren affien-lineaire combinaties, dus als T een affiene transformatie is geldt dat $T(C) = 2T(A) - T(B)$. Maar als $T(A) = B$, $T(B) = C$, en

$T(C) = A$ volgt dat $T(C) = A \neq 2B - C = 2T(A) - T(B)$. Dus kan een transformatie met deze eigenschappen geen affiene transformatie zijn.

6. Een projectieve transformatie $T : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^2$ is als een 3×3 matrix te schrijven. De voorwaarde $T(B) = C$ is voldan als we $(1, 1, 0)^t$ als eerste kolom van deze matrix kiesen, want dan is

$$T(B) = \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 1 & * & * \\ 0 & * & * \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = C$$

Als de tweede kolom $(x, y, z)^t$ is volgt dan uit de voorwaarde $T(C) = A$, dat wil zeggen

$$T(C) = \begin{pmatrix} 1 & x & * \\ 1 & y & * \\ 0 & z & * \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = A,$$

dat $z = 0$ moet zijn, en dat er een $\lambda \in \mathbb{R}$ is zo dat $1 + x = \lambda$ en $1 + y = -\lambda$. Op hetzelfde manier geeft de voorwaarde $T(A) = B$, dat wil zeggen

$$T(A) = \begin{pmatrix} 1 & x & * \\ 1 & y & * \\ 0 & z & * \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = B,$$

dat $1 - y = 0$. Deze voorwaarden zijn voldaan door $y = 1$ en $x = -3$. Elke matrix van de vorm

$$T = \begin{pmatrix} 1 & -3 & * \\ 1 & 1 & * \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix}$$

voldoet dus aan $T(A) = B$, $T(B) = C$, en $T(C) = A$. Omdat T een projectieve transformatie moet zijn, moet het een inverteerbare matrix zijn. Dat kunnen we ervoor zorgen door de derde kolom lineair onafhankelijk van de eerste twee te maken, bij voorbeeld

$$T = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$