Tentamen WISB141 Inleiding Meetkunde

vrijdag 9 juli 2021 15:15–18:15

1. Laat $d : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ gedefinieerd zijn als 1,5 pt.

$$d(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \begin{cases} 1 + d_{\mathbb{E}^2}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) & \text{als } \mathbf{a} \neq \mathbf{b} \text{ en } \mathbf{a} = (0,0) \\ 1 + d_{\mathbb{E}^2}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) & \text{als } \mathbf{a} \neq \mathbf{b} \text{ en } \mathbf{b} = (0,0) \\ d_{\mathbb{E}^2}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) & \text{in alle andere gevallen.} \end{cases}$$

Het is duidelijk (mag je zonder bewijs aannemen) dat $d(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \geq 0$ en $d(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = d(\mathbf{b}, \mathbf{a})$ voor alle $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^2$, en dat $d(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0$ dan en slechts dan als $\mathbf{a} = \mathbf{b}$. Voldoet d ook aan de driehoeksongelijkheid? Bewijs je antwoord.

2. Gegeven zijn twee lijnen ℓ_1 en ℓ_2 in $\mathbb{E}^2$. We definiëren ook $\ell_2' = \mathrm{Sp}_{\ell_1}(\ell_2)$. 2 pt.

   (a) Laat zien dat $\mathrm{Sp}_{\ell_1} \circ \mathrm{Sp}_{\ell_2} \circ \mathrm{Sp}_{\ell_1}(P) = P$ voor elk punt $P \in \ell_2'$.

   (b) Laat zien dat $\mathrm{Sp}_{\ell_1} \circ \mathrm{Sp}_{\ell_2} \circ \mathrm{Sp}_{\ell_1} = \mathrm{Sp}_{\ell_2'}$. (Hint: het kan handig zijn om op te merken of $\mathrm{Sp}_{\ell_1} \circ \mathrm{Sp}_{\ell_2} \circ \mathrm{Sp}_{\ell_1}$ een directe of indirecte isometrie is.)

3. Gegeven zijn de punten $N = (0,0,1)$, $Z = (0,0,-1)$, $P = (1,0,0)$, $Q = (0,1,0)$ op de bolschil S^2. Duidelijk geldt voor de rotatie $\mathrm{Rot}_{N,\frac{\pi}{2}}$ van S^2 dat $\mathrm{Rot}_{N,\frac{\pi}{2}}(P) = Q$. Zijn er rotaties $\mathrm{Rot}_{A,\varphi}$ van S^2 waarvoor $\mathrm{Rot}_{A,\varphi}(P) = Q$ maar waar het rotatiepunt A een ander punt is dan N of Z? Zo ja, geef een voorbeeld van zo'n rotatie. Zo nee, laat zien dat er geen zo'n rotatie bestaat. 1,5 pt.

4. Gegeven zijn $\mathbf{b}_0 = (\sqrt{2}, 1, 0)$, $\mathbf{b}_1 = (0,0,1)$, en $\bar{\mathbf{o}} = (1,0,0)$ in $\mathbb{R}^3$. 2 pt.

   (a) Bepaal een vector $\mathbf{b}_2$ die $\mathbf{b}_0$, $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$ tot een Lorentzbasis maakt.

   Laat T de glijspiegeling van de hyperboloïde $\mathcal{H}^2$ zijn die geschreven kunt worden als

$$T(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \cosh s & \sinh s & 0 \\ \sinh s & \cosh s & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x}$$

   ten opzichte van de Lorentzbasis $\mathbf{b}_0$, $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$. Er is precies één hyperbolische lijn (groothyperbool) ℓ die door T op zichzelf wordt afgebeeld.

   (b) Zijn een of meer van $\mathbf{b}_0$, $\mathbf{b}_1$, en $\bar{\mathbf{o}}$ punten op ℓ? Zo ja, welke? (Voor deze deelopgave hoeft je alleen het antwoord te geven, zonder uitleg of bewijs.)

5. Gegeven zijn de punten $A = (2,1)$, $B = (1,3)$, $C = (3,-1) \in \mathbb{A}^2$. Laat zien dat er geen affiene transformatie $T : \mathbb{A}^2 \to \mathbb{A}^2$ bestaat waarvoor 1,5 pt.

$$T(A) = B, \quad T(B) = C, \quad \text{en} \quad T(C) = A.$$

6. Gegeven zijn de punten $A = (1 : -1 : 0)$, $B = (1 : 0 : 0)$, $C = (1 : 1 : 0) \in \mathbb{P}^2$. Geef een voorbeeld van een projectieve transformatie $T : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^2$ waarvoor 1,5 pt.

$$T(A) = B, \quad T(B) = C, \quad \text{en} \quad T(C) = A.$$