INLEIDING GROEPEN EN RINGEN 2020–2021

TENTAMEN 28 JUNI 2021, 15:15-18:15 (EXTRA TIJD TOT 18:45)

(CAMPUS VERSIE)

- Het tentamen bestaat uit vier vragen (die op hun beurt weer bestaan uit deelvragen). Gebruik voor het beantwoorden van elk van de vier vragen een apart vel examenpapier en schrijf op ieder vel je volledige naam en studentnummer. (Let op: de tentamenvragen worden parallel nagekeken, en daarvoor wordt je ingeleverde werk verdeeld over meerdere nakijkers. Als je naam niet op ieder vel staat kan je werk verloren gaan.)
- Het tentamen is "open boek". Dit betekent dat je het boek van Dummit & Foote mag gebruiken bij het tentamen, hetzij een papieren kopie, hetzij een digitale kopie op een meegebrachte laptop of tablet (geen telefoon); dit laatste onder volgende strikte voorwaarden:
  - wifi en mobiele data zijn ten allen tijde uitgeschakeld
  - geluid staat op mute
  - zorg ervoor dat voor aanvang van het tentamen alles is klaargezet en het document geopend is
  - je mag niet typen (ook niet om naar een woord zoeken), enkel scrollen
  - surveillanten mogen altijd meekijken naar je scherm
  - eventuele fraude zal worden gemeld bij de examencommissie
  - bij technische problemen (zoals bijv. een lege batterij) met je device zijn de surveillanten niet verantwoordelijk.

  Bij het tentamen mag je ook een printout gebruiken van hoofdstuk 17 en 18 over groepsacties uit het boek van Armstrong (op deze printout mag niets extra geschreven staan, behalve de correctie dat "e(x)=x" moet gelden op de eerste pagina). Bij het tentamen mag je ook je eigen aantekeningen meebrengen en gebruiken. Let op: je mag dit niet digitaal meebrengen en raadplegen; digitaal enkel het boek van Dummit & Foote.
- Schrijf helder maar bondig. Geef niet enkel het antwoord, maar ook de motivatie. Antwoorden zonder uitleg leveren geen punten op.
- Bij het geven van bewijzen mag je gebruik maken van alle kennis die je hebt opgedaan in de cursus, maar geef een eenduidige verwijzing als je iets gebruikt (bijv. naam van een stelling; verwijzing naar boek met paginanummer). Je mag zonder bewijs gebruik maken van stellingen uit de boeken of het hoorcollege, maar niet uit (zelfs gemaakte) opgaves.
- De surveillanten bij het tentamen zijn docenten van het vak. Bij inhoudelijke vragen kan je hen aanspreken.

Succes!

100pt

Tentamenvragen (English version follows)

Notatie: $\mathbf{R}$ zijn de reële getallen, $\mathbf{Q}$ de rationale getallen, $\mathbf{Z}$ de gehele getallen, met $N \in \mathbf{Z}$ is $\mathbf{Z}/N := \mathbf{Z}/N\mathbf{Z}$; voor $m \in \mathbf{Z}$ is $\overline{m}$ de notatie voor de corresponderende klasse in $\mathbf{Z}/N$. Je mag gebruiken dat het huidige jaar als volgt ontbindt in priemfactoren: $2021 = 43 \cdot 47$.

Vraag 1.

8pt (a) Bereken de inverse van het element $\overline{13}$ in de groep $(\mathbf{Z}/2021)^*$ voor vermenigvuldiging, en schrijf het resultaat als $\overline{m}$ met $0 \le m \le 2020$.

8pt (b) Stel $D_{18} = \langle r, s \mid r^9 = s^2 = e, rsr = s \rangle$ is de diëdergroep van orde 18. Schrijf het element

$$r^{28} s r^{2021} \in D_{14}$$

met hoogstens 3 symbolen (iedere letter, teken en cijfer telt als één symbool).

8pt (c) Beschouw de elementen $\sigma_1 = (152)(34)$ en $\sigma_2 = (163)(45)$ in S_6. Bereken een element $\tau \in S_6$, geschreven als product van disjuncte cykels, zodat $\sigma_2 = \tau\sigma_1\tau^{-1}$.

Vraag 2. Zijn onderstaande beweringen waar of onwaar? Bewijs of weerleg.

8pt (a) In de permutatiegroep S_{2021} is een product van alle transposities (waarbij iedere transpositie precies één keer voorkomt) altijd een even permutatie.

8pt (b) Als H een ondergroep is van G, dan is H een normale ondergroep in G dan en slechts dan als $H \times A_{2021}$ een normale ondergroep is in $G \times S_{2021}$.

8pt (c) De ring $\mathbf{R}[x, y]/(x + 1)$ is een lichaam.

8pt (d) De ring $\mathbf{Z}[x]/(7)$ is een hoofdideaaldomein.

Vraag 3. Geef een voorbeeld van, of laat zien dat zoiets niet kan bestaan:

8pt (a) Oneindig veel verschillende elementen van orde 2 in $\mathrm{GL}_2(\mathbf{R})$.

8pt (b) Een groepsactie van de diëdergroep D_{32768} van orde $32768 = 2^{15}$ met een baan die precies 2021 elementen heeft.

8pt (c) Een deelring van $\mathbf{Q}[x]$ die geen euclidisch domein is voor de norm $N(f) = \deg(f)$ als $f \neq 0$ en $N(0) = 0$.

Vraag 4. Stel dat $R = \mathbf{Q}[x]/(x^2)$.

4pt (a) Bepaal de nuldelers in R.

8pt (b) Bepaal de eenheden R^* in R, en bewijs dat er een groepsisomorfisme $R^* \cong \mathbf{Q}^* \times \mathbf{Q}$ bestaat (hier is $\mathbf{Q}$ de groep $\mathbf{Q}$ van rationale getallen onder optellen, en $\mathbf{Q}^* = \mathbf{Q} \setminus \{0\}$ de groep van inverteerbare rationale getallen onder vermenigvuldigen).

8pt (c) Bepaal alle idealen van R, en geef aan welke hiervan priemidealen zijn en welke maximale idealen zijn.

Einde van het tentamen

100pt

Exam questions

$\mathbf{R}$ denotes the real numbers, $\mathbf{Q}$ the rational numbers, $\mathbf{Z}$ the integers, for $N \in \mathbf{Z}$ is $\mathbf{Z}/N := \mathbf{Z}/N\mathbf{Z}$, and for $m \in \mathbf{Z}$, $\overline{m}$ denotes the corresponding class in $\mathbf{Z}/N$. You may use that the current year has prime factorisation $2021 = 43 \cdot 47$.

Question 1.

8pt (a) Compute the multiplicative inverse of $\overline{13}$ in the group $(\mathbf{Z}/2021)^*$ and write the result as $\overline{m}$ with $0 \leq m \leq 2020$.

8pt (b) Let $D_{18} = \langle r, s \mid r^9 = s^2 = e, rsr = s \rangle$ denote the dihedral group of order 18. Rewrite the element

$$r^{28} s r^{2021} \in D_{14}$$

using at most 3 symbols (where every letter, digit and sign counts as one symbol).

8pt (c) Consider the elements $\sigma_1 = (152)(34)$ and $\sigma_2 = (163)(45)$ in S_6. Compute an element $\tau \in S_6$, written as product of disjoint cycles, such that $\sigma_2 = \tau \sigma_1 \tau^{-1}$.

Question 2. Are the following statements true or false? Prove or disprove.

8pt (a) In the permutation group S_{2021}, a product of all transpositions (in which every transposition occurs exactly once) is always an even permutation.

8pt (b) If H is a subgroup of a group G, then H is a normal subgroup of G if and only if $H \times A_{2021}$ is a normal subgroup of $G \times S_{2021}$.

8pt (c) The ring $\mathbf{R}[x, y]/(x + 1)$ is a field.

8pt (d) The ring $\mathbf{Z}[x]/(7)$ is a principal ideal domain.

Question 3. Give an example of, or show that such a thing cannot exist:

8pt (a) Infinitely many elements of order 2 in $\mathrm{GL}_2(\mathbf{R})$.

8pt (b) An action of the dihedral group D_{32768} of order $32768 = 2^{15}$ having an orbit consisting of exactly 2021 elements.

8pt (c) A subring of $\mathbf{Q}[x]$ that is not a Euclidean domain for the norm $N(f) = \deg(f)$ for $f \neq 0$ and $N(0) = 0$.

Question 4. Let $R = \mathbf{Q}[x]/(x^2)$.

4pt (a) Determine the zero divisors in R.

8pt (b) Determine the units R^* in R, and prove that there is a group isomorphism $R^* \cong \mathbf{Q}^* \times \mathbf{Q}$ (here, $\mathbf{Q}$ is the group of rational numbers for addition, and $\mathbf{Q}^* = \mathbf{Q} \setminus \{0\}$ is the group of invertible rational numbers for multiplication).

8pt (c) Determine all ideals of R, and indicate which ones are prime ideals and which ones are maximal ideals.

End of the exam