INLEIDING GROEPEN EN RINGEN 2020–2021

HERENTAMEN 19 JULI 2021, 15:15-18:15 (EXTRA TIJD TOT 18:45)

(CAMPUS VERSIE)

- Je hoeft geen apart vel examenpapier te gebruiken per vraag, maar schrijf wel op ieder vel je volledige naam en studentnummer.
- Het tentamen is "open boek". Dit betekent dat je het boek van Dummit & Foote mag gebruiken bij het tentamen, hetzij een papieren kopie, hetzij een digitale kopie op een meegebrachte laptop of tablet (geen telefoon); dit laatste onder volgende strikte voorwaarden:
  - wifi en mobiele data zijn ten allen tijde uitgeschakeld
  - geluid staat op mute
  - zorg ervoor dat voor aanvang van het tentamen alles is klaargezet en het document geopend is
  - je mag niet typen (ook niet om naar een woord zoeken), enkel scrollen
  - surveillanten mogen altijd meekijken naar je scherm
  - eventuele fraude zal worden gemeld bij de examencommissie
  - bij technische problemen (zoals bijv. een lege batterij) met je device zijn de surveillanten niet verantwoordelijk.

  Bij het tentamen mag je ook een printout gebruiken van hoofdstuk 17 en 18 over groepsacties uit het boek van Armstrong (op deze printout mag niets extra geschreven staan, behalve de correctie dat "e(x)=x" moet gelden op de eerste pagina). Bij het tentamen mag je ook je eigen aantekeningen meebrengen en gebruiken. Let op: je mag dit niet digitaal meebrengen en raadplegen; digitaal enkel het boek van Dummit & Foote. Je mag ook een rekenmachine in examenstand gebruiken.
- Schrijf helder maar bondig. Geef niet enkel het antwoord, maar ook de motivatie. Antwoorden zonder uitleg leveren geen punten op.
- Bij het geven van bewijzen mag je gebruik maken van alle kennis die je hebt opgedaan in de cursus, maar geef een eenduidige verwijzing als je iets gebruikt (bijv. naam van een stelling; verwijzing naar boek met paginanummer). Je mag zonder bewijs gebruik maken van stellingen uit de boeken of het hoorcollege, maar niet uit (gemaakte of ongemaakte) opgaves.

Succes!

100pt

Hertentamenvragen (English version follows)

Notatie: $\mathbf{R}$ zijn de reële getallen, $\mathbf{Q}$ de rationale getallen, $\mathbf{Z}$ de gehele getallen, met $N \in \mathbf{Z}$ is $\mathbf{Z}/N := \mathbf{Z}/N\mathbf{Z}$; voor $m \in \mathbf{Z}$ is $\overline{m}$ de notatie voor de corresponderende klasse in $\mathbf{Z}/N$. Je mag gebruiken dat het huidige jaar als volgt ontbindt in priemfactoren: $2021 = 43 \cdot 47$. De woorden "fixpunt" en "vast punt" betekenen hetzelfde.

Vraag 1.

8pt (a) Bereken de inverse van het element $\overline{19}$ in de groep $(\mathbf{Z}/2021)^*$ voor vermenigvuldiging, en schrijf het resultaat als $\overline{m}$ met $0 \leq m \leq 2020$.

8pt (b) Stel $D_{18} = \langle r, s \mid r^9 = s^2 = e, rsr = s \rangle$ is de diëdergroep van orde 18. Schrijf het element

$$r^{19}s^7r^{2021} \in D_{18}$$

met hoogstens 3 symbolen (iedere letter, teken en cijfer telt als één symbool).

8pt (c) Bereken de orde van de cyclische ondergroep van $\mathrm{GL}_2(\mathbf{R})$ voortgebracht door $\begin{pmatrix} 5 & -12 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$.

8pt (d) Definieer de hoofdidealen $I := (x + 19)$, $J := (x^6)$ en $K := (x^{2021} + x)$ in de polynomenring $\mathbf{R}[x]$. Schrijf het ideaal $L := J + (I \cdot (J + K))$ als hoofdideaal en bepaal of de ring $\mathbf{R}[x]/L$ een domein is of niet.

Vraag 2. Zijn onderstaande beweringen waar of onwaar? Bewijs of weerleg.

8pt (a) In de permutatiegroep S_{2021} is een product van alle transposities die "1" niet op zichzelf afbeelden (waarbij iedere dergelijke transpositie precies één keer voorkomt) altijd een oneven permutatie.

8pt (b) Als $\varphi\colon G \to H$ een surjectief groepshomomorfisme is, waarbij G van orde 2021 is en H niet de triviale groep is, dan is H cyclisch.

8pt (c) In iedere groep is conjugatie met een vast, willekeurig gekozen, element van de groep een isomorfisme van de groep met zichzelf.

8pt (d) Voor de actie van een groep op zichzelf door linksvermenigvuldiging heeft geen enkel element van de groep vaste punten.

8pt (e) De groep $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Z}/2)$ van 2×2 inverteerbare matrices over het lichaam $\mathbf{Z}/2$ is isomorf met S_3.

8pt (f) Als een eindige groep G werkt op een eindige verzameling met n elementen, zodat alle $g \neq e$ in G precies één fixpunt hebben, dan is de orde van G een deler van $n - 1$.

8pt (g) De ring $\mathbf{Q}[x]/(x^{2021} + 43x^{17} + 2021)$ is een lichaam.

Vraag 3. Geef een voorbeeld van, of laat zien dat zoiets niet kan bestaan:

6pt (a) Een quotient van de polynomenring $\mathbf{R}[x, y, z]$ in drie variabelen dat een hoofdideaaldomein is.

6pt (b) Een ring met precies negentien verschillende idealen.

Einde van het hertentamen

100pt

Retake exam questions

Notation: $\mathbf{R}$ denotes the real numbers, $\mathbf{Q}$ the rational numbers, $\mathbf{Z}$ the integers, for $N \in \mathbf{Z}$ is $\mathbf{Z}/N := \mathbf{Z}/N\mathbf{Z}$, and for $m \in \mathbf{Z}$, $\overline{m}$ denotes the corresponding class in $\mathbf{Z}/N$. You may use that the current year has prime factorisation $2021 = 43 \cdot 47$.

Question 1.

8pt (a) Compute the multiplicative inverse of $\overline{19}$ in the group $(\mathbf{Z}/2021)^*$ and write the result as $\overline{m}$ with $0 \leq m \leq 2020$.

8pt (b) Let $D_{18} = \langle r, s \mid r^9 = s^2 = e, rsr = s\rangle$ denote the dihedral group of order 18. Rewrite the element

$$r^{19}s^7r^{2021} \in D_{18}$$

using at most 3 symbols (where every letter, digit and sign counts as one symbol).

8pt (c) Compute the order of the cyclic subgroup of $\mathrm{GL}_2(\mathbf{R})$ generated by $\begin{pmatrix} 5 & -12 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$.

8pt (d) Define the principal ideals $I := (x + 19)$, $J := (x^6)$ and $K := (x^{2021} + x)$ in the polynomial ring $\mathbf{R}[x]$. Write the ideal $L := J + (I \cdot (J + K))$ as principal ideal and use this to decide whether or not $\mathbf{R}[x]/L$ is an integral domain.

Question 2. Are the following statements true of false? Proof or refute.

8pt (a) In the permutation group S_{2021} a product (in any order) of all transpositions that do not map "1" to itself (where every such transposition occurs exactly once) is always an odd permutation.

8pt (b) If $\varphi\colon G \to H$ is a surjective group homomorphism, where G has order 2021 and H is not the trivial group, then H is cyclic.

8pt (c) In any group conjugation by a fixed, arbitrarily chosen, element of the group is an isomorphism of the group with itself.

8pt (d) If a group acts on itself by left multiplication, no element of the group has fixed points.

8pt (e) The group $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Z}/2)$ of 2×2 invertible matrices over the field $\mathbf{Z}/2$ is isomorphic to S_3.

8pt (f) If a finite group G acts on a finite set with n elements, such that all $g \neq e$ in G have exactly one fixed point, then the order of G divides $n - 1$.

8pt (g) The ring $\mathbf{Q}[x]/(x^{2021} + 43x^{17} + 2021)$ is a field.

Question 3. Give an example of, or show that such a thing cannot exist:

6pt (a) A quotient of the polynomial ring in three variables $\mathbf{R}[x, y, z]$ that is a PID.

6pt (b) A ring with exactly 19 distinct ideals.

End of the retake exam