Analyse (WISB 114) - Tentamen

Sjoerd Dirksen

14 april 2021, 11:30-14:30

Dit tentamen bestaat uit 4 vragen, die in totaal 45 punten waard zijn. Als het je niet lukt om een onderdeel van een vraag te beantwoorden, dan is het nog steeds mogelijk om de daarop volgende onderdelen te beantwoorden. Je mag daarbij eerdere onderdelen zonder bewijs gebruiken. Schrijf op elk ingeleverd blad jouw naam en studentnummer en nummer de pagina's. Voorzie elk antwoord van een zorgvuldige motivatie. Als je een resultaat uit het dictaat gebruikt, vermeld dit dan expliciet (met de naam of het nummer van het resultaat) en laat ook zien dat aan alle voorwaarden van het resultaat voldaan is. Succes!

Opgave 1 [5 punten]

Gebruik de middelwaardestelling om te laten zien dat

$$e^x - e^{-1} > \frac{x+1}{e}$$

voor alle $x > -1$.

Uitwerking:

Stel dat $x > -1$. Merk op dat de functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(t) = e^t$, differentieerbaar is op $(-1, x)$ en continu op $[-1, x]$. Uit de middelwaardestelling volgt dat er een $c \in (-1, x)$ bestaat zodat

$$\frac{e^x - e^{-1}}{x+1} = \frac{e^x - e^{-1}}{x-(-1)} = f'(c) = e^c > e^{-1},$$

waarbij we in de laatste ongelijkheid gebruikt hebben dat f volgens Stelling 6.7 strikt monotoon stijgend is.

Opgave 2 [8 punten]

Zij (V, d_V) een metrische ruimte, I een verzameling, $A_i \subset V$ rij-compact voor elke $i \in I$. Definieer $A = \cup_{i \in I} A_i$.

(a) Laat zien dat A rij-compact is als I eindig veel elementen heeft.

(b) Laat zien dat A in het algemeen niet rij-compact is.

Uitwerking:

(a) Zij $(a_n)_{n\geq 0}$ een rij in A. Aangezien I eindig is, moet er een $j \in I$ zijn zodat A_j oneindig veel elementen van de rij $(a_n)_{n\geq 0}$ en dus een deelrij $(a_{n_k})_{k\geq 0}$ van $(a_n)_{n\geq 0}$ bevat. Aangezien A_j rij-compact is, bestaat er deelrij $(a_{n_{k_i}})_{i\geq 0}$ van $(a_{n_k})_{k\geq 0}$ en een $a \in A_j \subset A$ zodat $\lim_{i\to\infty} a_{n_{k_i}} = a$. Aangezien $(a_{n_{k_i}})_{i\geq 0}$ ook een deelrij van $(a_n)_{n\geq 0}$ is, volgt dat A rij-compact is.

(b) Zij $V = \mathbb{R}$ (met de Euclidische metriek). We weten dat een deelverzameling van $\mathbb{R}$ rij-compact is dan en slechts dan als deze gesloten en begrensd is (Gevolg 4.24). Definieer nu $I = \mathbb{N}$, $A_n = [-n, n]$. Dan is A_n rij-compact voor elke n, maar $\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \mathbb{R}$ is niet rij-compact, aangezien $\mathbb{R}$ niet begrensd is.

Opgave 3 [16 punten]

Zij $f : [1, \infty) \to \mathbb{R}$ monotoon dalend en stel dat $f \geq 0$ op $[1, \infty)$. We gebruiken hieronder (zonder bewijs) dat f Riemann-integreerbaar is.

(a) Laat zien dat voor $N \in \mathbb{N}$, $N \geq 1$, geldt

$$\sum_{k=2}^{N+1} f(k) \leq \int_1^{N+1} f(t)\, dt \leq \sum_{k=1}^{N} f(k).$$

(b) Bekijk de rij $(a_k)_{k\geq 1}$ gedefinieerd door $a_k = f(k)$. Laat zien dat $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ convergeert dan en slechts dan als $\int_1^{\infty} f(t)\, dt$ convergeert, d.w.z., $\lim_{R\to\infty} \int_1^R f(t)\, dt$ bestaat.

(c) Laat zien dat $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^q}$ convergeert dan en slechts dan als $q > 1$.

Uitwerking:

(a) Bekijk de verdeling $V = \{1, \ldots, N+1\}$ van $[1, N+1]$. Aangezien f monotoon dalend is, is f Riemann-integreerbaar op $[1, N+1]$ en dus geldt

$$\underline{S}(f, V) \leq \int_1^{N+1} f(x)\, dx \leq \overline{S}(f, V).$$

Uit de definitie volgt direct dat

$$\overline{S}(f, V) = \sum_{k=1}^{N} \sup_{x\in[k,k+1]} f(x)((k+1) - k) = \sum_{k=1}^{N} f(k),$$

waarbij we in de laatste stap gebruiken dat f monotoon dalend is. Op dezelfde manier zien we dat

$$\underline{S}(f, V) = \sum_{k=1}^{N} \inf_{x\in[k,k+1]} f(x)((k+1) - k) = \sum_{k=1}^{N} f(k+1) = \sum_{k=2}^{N+1} f(k).$$

Een soortgelijke uitwerking met behulp van Lemma 7.24 en Stelling 7.26 is ook mogelijk.

(b) Merk allereerst op dat de functie $g : [1, \infty) \to [0, \infty)$,

$$g(R) = \int_1^R f(t)\, dt$$

monotoon stijgend is. Inderdaad, $f \geq 0$ en dus geldt voor $R \leq T$ dat

$$g(T) - g(R) = \int_R^T f(t)\, dt \geq 0,$$

zie Lemma 7.24. In het bijzonder geldt voor elke $R > 0$ dat $g([R]) \leq g(R) \leq g([R]+1)$. Hieruit volgt dat $\lim_{R\to\infty} \int_1^R f(t)\ dt$ bestaat dan en slechts dan als $\lim_{N\to\infty} \int_1^N f(t)\ dt$ bestaat.

Aangezien $f \geq 0$ geldt $a_k = f(k) \geq 0$ voor alle k en dus is de rij van deelsommen $(s_N)_{N\geq 1}$, $s_N = \sum_{k=1}^N a_k$, monotoon stijgend.

Stel nu dat $\sum_{k=1}^\infty a_k$ convergeert. Uit deel (a) volgt voor elke $N \in \mathbb{N}$, $N \geq 1$,

$$\int_1^{N+1} f(t)\ dt \leq \sum_{k=1}^N a_k \leq \sum_{k=1}^\infty a_k.$$

De rij $(b_N)_{N\geq 1}$, $b_N := \int_1^{N+1} f(t)\ dt$, is daarom naar boven begrensd en monotoon stijgend. Uit Stelling 3.50 volgt nu dat $(b_N)_{N\geq 1}$ (en dus $\int_1^\infty f(t)\ dt$) convergeert.

Als $\int_1^\infty f(t)\ dt$ convergeert dan volgt uit deel (a) dat voor elke $N \geq 1$ geldt

$$s_{N+1} - a_1 = \sum_{k=1}^{N+1} a_k - a_1 < \sum_{k=2}^{N+1} f(k) \leq \int_1^{N+1} f(t)\ dt \leq \int_1^\infty f(t)\ dt.$$

De rij $(s_N)_{N\geq 1}$ is daarom naar boven begrensd en monotoon stijgend. Uit Stelling 3.50 volgt nu dat $\sum_{k=1}^\infty a_k$ convergeert.

(c) Uit de hoofdstelling van de integraalrekening volgt

$$\int_1^R t^{-q}\ dt = \begin{cases} \frac{1}{1-q}(R^{1-q} - 1) & \text{als } 0 \leq q < 1 \\ \log(R) & \text{als } q = 1 \\ \frac{1}{1-q}(R^{1-q} - 1) & \text{als } q > 1, \end{cases}$$

dus $\int_1^\infty f(t)\ dt$ convergeert dan en slechts dan als $q > 1$. De bewering volgt nu direct door het criterium in deel (b) toe te passen voor de monotoon dalende, positieve functie $f(t) = t^{-q}$. Een uitwerking in het geval $q < 0$ werd niet verwacht, maar wordt hier voor de volledigheid gegeven: als $q < 0$, dan geldt voor elke $N > 0$ dat $\sum_{k=1}^N \frac{1}{k^q} \geq N$ en dus volgt $\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^q} = \infty$.

Opgave 4 [16 punten]

Zij $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ een norm op $\mathbb{R}^n$. We beschouwen in deze opgave $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$ als metrische ruimten met de Euclidische metriek.

(a) Laat zien dat $\sum_{i=1}^n |x_i| \leq n\|x\|_2$ voor elke $x \in \mathbb{R}^n$.

(b) Laat zien dat er een $C > 0$ bestaat, die alleen afhangt van n en de norm $\|\cdot\|$, zodat

$$\|x\| \leq C\|x\|_2, \qquad \text{voor alle } x \in \mathbb{R}^n.$$

Hint: schrijf $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$, waarbij e_i de i-de standaardbasisvector is.

(c) Zij $S^{n-1} = \{y \in \mathbb{R}^n\ :\ \|y\|_2 = 1\}$ de Euclidische eenheidssfeer. Laat zien dat de functie $f : S^{n-1} \to \mathbb{R}$, $f(y) = \|y\|$, Lipschitz continu is.

(d) Gebruik de maximum-minimum stelling en deel (c) om te laten zien dat er een $c > 0$ bestaat, die alleen afhangt van n en de norm $\|\cdot\|$, zodat

$$c\|x\|_2 \leq \|x\|, \qquad \text{voor alle } x \in \mathbb{R}^n.$$

(e) (voor 3 bonuspunten) Zij $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ gedefinieerd door

$$\|x\| = \max_{1\le i\le n} |x_i|.$$

Laat zien dat de c in onderdeel (d) niet onafhankelijk van n gekozen kan worden.

Uitwerking:

(a) Merk op dat

$$\sum_{i=1}^n |x_i| \le n\left[\max_{1\le i\le n} |x_i|\right] \le n\left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)^{1/2} = n\|x\|_2.$$

(b) Aangezien $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$, volgt uit de driehoeksongelijkheid en deel (a) dat

$$\begin{aligned}\|x\| = \left\|\sum_{i=1}^n x_i e_i\right\| &\le \sum_{i=1}^n |x_i|\cdot\|e_i\| \\ &\le \left[\max_{1\le i\le n}\|e_i\|\right]\cdot\sum_{i=1}^n |x_i| \le n\left[\max_{1\le i\le n}\|e_i\|\right]\cdot\|x\|_2.\end{aligned}$$

(c) Uit de omgekeerde driehoeksongelijkheid en deel (a) volgt voor alle $x, y \in S^{n-1}$ dat

$$|f(x) - f(y)| = |\|x\| - \|y\|\,| \le \|x-y\| \le C\|x-y\|_2,$$

dus f is Lipschitz continu.

(d) Merk op dat S^{n-1} begrensd is en ook gesloten. Inderdaad, stel dat $(a_n)_{n\ge 0}$ een rij in S^{n-1} is en $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ in $\mathbb{R}^n$. Zij $\varepsilon > 0$. Dan is er een $N \in \mathbb{N}$ zodat $\|a_n - a\|_2 < \varepsilon$ voor alle $n \ge N$. Voor zulke n geldt dan ook dat

$$1-\varepsilon < \|a_n\|_2 - \|a_n - a\|_2 \le \|a\|_2 \le \|a - a_n\|_2 + \|a_n\|_2 < 1+\varepsilon.$$

Aangezien $\varepsilon > 0$ willekeurig was, volgt nu dat $\|a\|_2 = 1$, dus S^{n-1} is gesloten.

Uit de maximum-minimum stelling (Stelling 4.32) volgt nu direct dat f een minimum op S^{n-1} aanneemt, d.w.z., voor alle $y \in S^{n-1}$ geldt $f(y) \ge f(y^*) = \|y^*\|$ voor een zekere $y^* \in S^{n-1}$. Aangezien $y^* \neq 0$, volgt $\|y^*\| =: c > 0$ en dus $f(y) \ge c$ voor alle $y \in S^{n-1}$, d.w.z., de gewenste ongelijkheid geldt voor alle $x \in S^{n-1}$. Als $x \in \mathbb{R}^n$ met $x \neq 0$ dat $x/\|x\|_2 \in S^{n-1}$ en dus

$$\frac{\|x\|}{\|x\|_2} = \left\|\frac{x}{\|x\|_2}\right\| = f\left(\frac{x}{\|x\|_2}\right) \ge c$$

en dus geldt voor alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$

$$\|x\| \ge c\|x\|_2.$$

Merk tenslotte op dat de ongelijkheid triviaal is voor $x = 0$.

(e) Stel dat er een constante $c > 0$ is zodat voor elke $n \geq 1$ geldt

$$c\|x\|_2 \leq \|x\|_\infty, \qquad \text{voor alle } x \in \mathbb{R}^n.$$

Zij $x_k = \frac{1}{\sqrt{k}}$, $k \geq 1$, en zij $x^{(n)} = (x_1, \ldots, x_n)$. Dan geldt voor elke $n \geq 1$

$$c^2 \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = c^2 \|x^{(n)}\|_2^2 \leq \|x^{(n)}\|_\infty^2 = 1.$$

Dit geeft een tegenspraak met het feit dat

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \infty.$$