Analyse (WISB 114) - Tentamen

Sjoerd Dirksen

14 april 2021, 11:30-14:30

Dit tentamen bestaat uit 4 vragen, die in totaal 45 punten waard zijn. Als het je niet lukt om een onderdeel van een vraag te beantwoorden, dan is het nog steeds mogelijk om de daarop volgende onderdelen te beantwoorden. Je mag daarbij eerdere onderdelen zonder bewijs gebruiken. Schrijf op elk ingeleverd blad jouw naam en studentnummer en nummer de pagina's. Voorzie elk antwoord van een zorgvuldige motivatie. Als je een resultaat uit het dictaat gebruikt, vermeld dit dan expliciet (met de naam of het nummer van het resultaat) en laat ook zien dat aan alle voorwaarden van het resultaat voldaan is. Succes!

Opgave 1 [5 punten]

Gebruik de middelwaardestelling om te laten zien dat

$$e^x - e^{-1} > \frac{x+1}{e}$$

voor alle $x > -1$.

Opgave 2 [8 punten]

Zij (V, d_V) een metrische ruimte, I een verzameling, $A_i \subset V$ rij-compact voor elke $i \in I$. Definieer $A = \cup_{i \in I} A_i$.

(a) Laat zien dat A rij-compact is als I eindig veel elementen heeft.

(b) Laat zien dat A in het algemeen niet rij-compact is.

Opgave 3 [16 punten]

Zij $f : [1, \infty) \to \mathbb{R}$ monotoon dalend en stel dat $f \geq 0$ op $[1, \infty)$. We gebruiken hieronder (zonder bewijs) dat f Riemann-integreerbaar is.

(a) Laat zien dat voor $N \in \mathbb{N}$, $N \geq 1$, geldt

$$\sum_{k=2}^{N+1} f(k) \leq \int_1^{N+1} f(t)\, dt \leq \sum_{k=1}^{N} f(k).$$

(b) Bekijk de rij $(a_k)_{k \geq 1}$ gedefinieerd door $a_k = f(k)$. Laat zien dat $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ convergeert dan en slechts dan als $\int_1^{\infty} f(t)\, dt$ convergeert, d.w.z., $\lim_{R \to \infty} \int_1^R f(t)\, dt$ bestaat.

(c) Laat zien dat $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^q}$ convergeert dan en slechts dan als $q > 1$.

Opgave 4 [16 punten]

Zij $\| \cdot \| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ een norm op $\mathbb{R}^n$. We beschouwen in deze opgave $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$ als metrische ruimten met de Euclidische metriek.

(a) Laat zien dat $\sum_{i=1}^{n} |x_i| \leq n \|x\|_2$ voor elke $x \in \mathbb{R}^n$.

(b) Laat zien dat er een $C > 0$ bestaat, die alleen afhangt van n en de norm $\| \cdot \|$, zodat

$$\|x\| \leq C \|x\|_2, \qquad \text{voor alle } x \in \mathbb{R}^n.$$

Hint: schrijf $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$, waarbij e_i de i-de standaardbasisvector is.

(c) Zij $S^{n-1} = \{y \in \mathbb{R}^n \ : \ \|y\|_2 = 1\}$ de Euclidische eenheidssfeer. Laat zien dat de functie $f : S^{n-1} \to \mathbb{R}$, $f(y) = \|y\|$, Lipschitz continu is.

(d) Gebruik de maximum-minimum stelling en deel (c) om te laten zien dat er een $c > 0$ bestaat, die alleen afhangt van n en de norm $\| \cdot \|$, zodat

$$c\|x\|_2 \leq \|x\|, \qquad \text{voor alle } x \in \mathbb{R}^n.$$

(e) (voor 3 bonuspunten) Zij $\| \cdot \| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ gedefinieerd door

$$\|x\| = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|.$$

Laat zien dat de c in onderdeel (d) niet onafhankelijk van n gekozen kan worden.