Analyse (WISB 114) - Hertentamen

Sjoerd Dirksen

7 juli 2021, 11:30-14:30

Dit tentamen bestaat uit 4 vragen, die in totaal 45 punten waard zijn. Als het je niet lukt om een onderdeel van een vraag te beantwoorden, dan is het nog steeds mogelijk om de daarop volgende onderdelen te beantwoorden. Je mag daarbij eerdere onderdelen zonder bewijs gebruiken. Schrijf op elk ingeleverd blad jouw naam en studentnummer en nummer de pagina's. Voorzie elk antwoord van een zorgvuldige motivatie. Als je een resultaat uit het dictaat gebruikt, vermeld dit dan expliciet (met de naam of het nummer van het resultaat) en laat ook zien dat aan alle voorwaarden van het resultaat voldaan is. Succes!

Opgave 1 [10 punten]

Zij $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ en $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ continu differentieerbaar (d.w.z., differentieerbaar met een continue afgeleide) en $g(x) \neq 0$ voor alle $x \in [a, b]$. Laat zien dat

$$\int_a^b \frac{f'(t)g(t) - f(t)g'(t)}{(g(t))^2}\, dt = \frac{f(b)}{g(b)} - \frac{f(a)}{g(a)}.$$

Toon hiermee aan dat voor alle $x \in [\frac{\pi}{2}, \pi)$ geldt

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^x \frac{1}{\sin^2(t)}\, dt = -\frac{\cos(x)}{\sin(x)}.$$

Opmerking: je mag aannemen dat de sinus en cosinus functies willekeurig vaak differentieerbaar zijn en de bekende uitdrukkingen voor de afgeleiden van deze functies gebruiken.

Uitwerking:

Aangezien $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ continu differentieerbaar zijn en $g(x) \neq 0$ voor alle $x \in [a, b]$, volgt uit Lemma 1.55 dat de functie $h = \frac{f}{g} : [a, b] \to \mathbb{R}$ een goed gedefinieerde differentieerbare functie is en

$$h'(t) = \frac{f'(t)g(t) - f(t)g'(t)}{(g(t))^2}.$$

Aangezien f, f', g, g' continu zijn, volgt uit Lemma 1.44 dat h' continu is. Nu volgt direct uit de hoofdstelling van de integraalrekening dat

$$\int_a^b \frac{f'(t)g(t) - f(t)g'(t)}{(g(t))^2}\, dt = \int_a^b h'(t)\, dt = h(b) - h(a) = \frac{f(b)}{g(b)} - \frac{f(a)}{g(a)}.$$

Voor de tweede bewering nemen we een $x \in [\frac{\pi}{2}, \pi)$. Merk op dat de functies $f, g : (0, \pi) \to \mathbb{R}$ gedefinieerd door $f(t) = \cos(t)$ en $g(t) = \sin(t)$ willekeurig vaak differentieerbaar zijn en in het bijzonder continu differentieerbaar zijn op het interval $[\frac{\pi}{2}, x]$.

Bovendien is $g(t) \neq 0$ voor alle $t \in [\frac{\pi}{2}, x]$. Uit het voorgaande volgt daarom dat

$$\begin{aligned}
-\int_{\frac{\pi}{2}}^{x} \frac{1}{\sin^2(t)}\, dt &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{x} \frac{-\sin^2(t) - \cos^2(t)}{\sin^2(t)}\, dt \\
&= \int_{\frac{\pi}{2}}^{x} \frac{f'(t)g(t) - f(t)g'(t)}{(g(t))^2}\, dt = \frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(\pi/2)}{g(\pi/2)} = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}.
\end{aligned}$$

Opgave 2 [10 punten]

Zij $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gedefinieerd door

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{als } x = y \\ 1 & \text{als } x \neq y. \end{cases}$$

(a) Laat zien dat d een metriek op $\mathbb{R}$ definieert.

(b) Zij $\hat{\mathbb{R}}$ de metrische ruimte $(\mathbb{R}, d)$. Laat zien dat elke deelverzameling $A \subset \mathbb{R}$ open is in $\hat{\mathbb{R}}$.

(c) Laat zien dat elke functie $f : \hat{\mathbb{R}} \to \hat{\mathbb{R}}$ continu is.

Uitwerking:

(a) Uit de definitie volgt direct dat $d(x, y) = d(y, x)$ voor alle x en y en

$$d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y.$$

Stel nu dat $x, y, z \in \mathbb{R}$. We willen laten zien dat

$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y).$$

Aangezien $d(x, z), d(z, y) \geq 0$ geldt dit automatisch als $x = y$. Stel dat $x \neq y$, zodat $d(x, y) = 1$. Als $z = x$ dan geldt $z \neq y$ en dus

$$d(x, z) + d(z, y) = 1 = d(x, y).$$

Dit geldt ook als $z = y$, aangezien dan $z \neq x$. Als $z \neq y$ en $z \neq x$, dan geldt

$$d(x, z) + d(z, y) = 2 > 1 = d(x, y).$$

(b) Zij $A \subset \mathbb{R}$ en $a \in A$. Als $\delta < 1$, dan geldt

$$B(a, \delta) = \{x \in \mathbb{R} \ : \ d(x, a) < \delta\} = \{x \in \mathbb{R} \ : \ d(x, a) = 0\} = \{a\} \subset A,$$

dus a is een inwendig punt van A. Aangezien $a \in A$ willekeurig was, is A open.

(c) Zij $f : \hat{\mathbb{R}} \to \hat{\mathbb{R}}$ een functie. Stel dat O open is in $\hat{\mathbb{R}}$, dan is $f^{-1}(O)$ een deelverzameling van $\mathbb{R}$ en dus open volgens deel (b). Uit Lemma 2.30 van het dictaat volgt nu dat f continu is.

Opgave 3 [14 punten]

Zij $(a_n)_{n\geq 0}$ een rij in $\mathbb{R}$ met $a_n > 0$ voor alle $n \in \mathbb{N}$. Stel dat

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1.$$

(a) Laat zien dat er een $0 < x < 1$ en $N \in \mathbb{N}$ bestaan zodat

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq x, \qquad \text{voor alle } n \geq N.$$

(b) Laat zien dat er een $C > 0$ en $0 < r < 1$ bestaan zodat

$$a_n \leq Cr^n, \qquad \text{voor alle } n \geq N.$$

(c) Laat met behulp van deel (b) zien dat $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ convergeert.

Hint: laat zien dat de deelsommen een Cauchy-rij vormen.

(d) Geef een voorbeeld (met bewijs) van een rij $(a_n)_{n\geq 0}$ met $a_n > 0$ voor alle $n \in \mathbb{N}$ en

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$$

zodat $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ divergeert.

(e) (voor 2 bonuspunten) Geef een voorbeeld (met bewijs) van een rij $(a_n)_{n\geq 0}$ met $a_n > 0$ voor alle $n \in \mathbb{N}$ en

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$$

zodat $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ convergeert.

Uitwerking:

(a) Zij

$$x' = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n},$$

dan volgt uit het feit dat $a_n > 0$ voor alle $n \in \mathbb{N}$ en het behoud van ongelijkheden onder limieten dat $0 \leq x' < 1$. Zij $\varepsilon = (1 - x')/2$, dan is $\varepsilon > 0$ en dus volgt uit de definitie van een limiet dat er een $N \in \mathbb{N}$ bestaat zodat

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} - x' \right| < \varepsilon = \frac{1}{2} - \frac{x'}{2}.$$

Hieruit volgt

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < x' + \frac{1}{2} - \frac{x'}{2} = \frac{1}{2} + \frac{x'}{2} < 1$$

voor alle $n \geq N$. We kunnen daarom $x = \frac{1}{2} + \frac{x'}{2}$ nemen.

(b) Zij x als in deel (a). We laten zien dat

$$a_n \leq x^{n-N} a_N, \qquad \text{voor alle } n \geq N.$$

Voor $n = N$ is deze ongelijkheid triviaal. Stel dat de ongelijkheid geldt voor een zekere $n \geq N$. Dan volgt uit deel (b) dat

$$a_{n+1} \leq x a_n \leq x^{(n+1)-N} a_N.$$

De bewering volgt nu met volledige inductie. We concluderen dat

$$a_n \le Cr^n, \qquad n \ge N,$$

met $r = x$ en $C = a_N x^{-N} > 0$.

(c) Zij $s_n = \sum_{k=0}^n a_k$, $n \ge 0$. Aangezien $a_n > 0$ voor alle n, volgt voor alle $n \ge m \ge N$

$$|s_n - s_m| = \sum_{k=m}^n a_k \le C \sum_{k=m}^n r^k = Cr^m \sum_{k=m}^n r^{k-m} \le Cr^m \sum_{k=0}^\infty r^k = \frac{Cr^m}{1-r}.$$

Zij $\varepsilon > 0$. Aangezien $\lim_{m\to\infty} r^m = 0$, kunnen we een $N' \ge N$ vinden zodat

$$r^m < \frac{\varepsilon(1-r)}{C}$$

voor alle $m \ge N'$. Hieruit volgt voor alle $n \ge m \ge N'$

$$|s_n - s_m| = \sum_{k=m}^n a_k < \varepsilon.$$

We concluderen $(s_n)_{n\ge 0}$ een Cauchy-rij is. Uit de volledigheid van $\mathbb{R}$ volgt nu dat $\sum_{n=0}^\infty a_n$ convergeert (Stelling 4.12).

(d) Bekijk de reeks $\sum_{n=1}^\infty 1$. Deze divergeert en

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1} = 1.$$

(e) Bekijk de reeks $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2}$. Deze convergeert (zie voorbeeld 3.57 van het dictaat) en uit de rekenregels voor limieten volgt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}} = 1.$$

Opgave 4 [11 punten]

Zij $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continu differentieerbaar. Neem aan dat er een *uniek* punt $x^* \in \mathbb{R}$ bestaat zodat $f'(x^*) = 0$. Neem aan dat f een lokaal minimum aanneemt in x^*. In deze opgave laten we zien dat f een globaal minimum in x^* aanneemt, d.w.z., $f(x) \ge f(x^*)$ voor alle $x \in \mathbb{R}$.

(a) Stel dat er een $\hat{x} > x^*$ bestaat zodat $f(\hat{x}) < f(x^*)$. Laat met behulp van de stelling van Rolle zien dat er een $x^* < \tilde{x} < \hat{x}$ bestaat zodat

$$f(\hat{x}) < f(x^*) < f(\tilde{x}).$$

(b) Bewijs nu met behulp van de middelwaardestelling dat f een globaal minimum in x^* aanneemt.

Hint: teken eerst een plaatje van de situatie in deel (a).

Uitwerking:

(a) Stel dat er een $\hat{x} > x^*$ bestaat zodat $f(\hat{x}) < f(x^*)$. Aangezien f een lokaal minimum in x^* aanneemt, is er een $\delta > 0$ zodat

$$f(x) \geq f(x^*), \qquad \text{voor alle } x \in (x^* - \delta, x^* + \delta).$$

In het bijzonder is er een $\tilde{x} \in (x^*, \hat{x})$ zodat $f(\tilde{x}) \geq f(x^*)$. Als $f(\tilde{x}) = f(x^*)$, dan vinden we met behulp van de stelling van Rolle een $y \in (x^*, \tilde{x})$ zodat $f'(y) = 0$, een tegenspraak. Er moet dus gelden dat

$$f(\hat{x}) < f(x^*) < f(\tilde{x})$$

(b) Stel dat er een $\hat{x} > x^*$ bestaat zodat $f(\hat{x}) < f(x^*)$ en zij $\tilde{x}$ zoals gegeven in deel (a). Merk op dat

$$\frac{f(\hat{x}) - f(\tilde{x})}{\hat{x} - \tilde{x}} < 0, \qquad \frac{f(\tilde{x}) - f(x^*)}{\tilde{x} - x^*} > 0.$$

Met behulp van de middelwaardestelling vinden we een $y \in (x^*, \tilde{x})$ met $f'(y) > 0$ en een $z \in (\tilde{x}, \hat{x})$ zodat $f'(z) < 0$. Aangezien f' continu is, bestaat er volgens de tussenwaardestelling een $u \in [y, z]$ zodat $f'(u) = 0$. Aangezien $u \neq x^*$, vinden we een tegenspraak. We concluderen dat er geen $\hat{x} > x^*$ kan bestaan met $f(\hat{x}) < f(x^*)$.

Alternatief kunnen we als volgt redeneren. Merk op dat f continu is. Uit de tussenwaardestelling volgt dat er een $v \in [\tilde{x}, \hat{x}]$ bestaat zodat $f(v) = f(x^*)$. Uit de stelling van Rolle volgt nu dat er $u \in (x^*, v)$ bestaat met $f'(u) = 0$. Aangezien $u \neq x^*$, vinden we een tegenspraak.

Stel nu dat er een $\hat{x} < x^*$ bestaat zodat $f(\hat{x}) < f(x^*)$. Bekijk de functie $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gedefinieerd door $g(x) = f(-x)$. Dan neemt g een lokaal minimum aan in $-x^*$ en $-x^*$ is het unieke punt waarin de afgeleide van g nul is. Bovendien geldt $-\hat{x} > -x^*$ en $g(-\hat{x}) < g(-x^*)$. Het bovenstaande argument geeft nu een tegenspraak.

Hiermee concluderen we dat $f(x^*) \leq f(x)$ voor alle $x \in \mathbb{R}$.