Analyse (WISB 114) - Hertentamen

Sjoerd Dirksen

7 juli 2021, 11:30-14:30

Dit tentamen bestaat uit 4 vragen, die in totaal 45 punten waard zijn. Als het je niet lukt om een onderdeel van een vraag te beantwoorden, dan is het nog steeds mogelijk om de daarop volgende onderdelen te beantwoorden. Je mag daarbij eerdere onderdelen zonder bewijs gebruiken. Schrijf op elk ingeleverd blad jouw naam en studentnummer en nummer de pagina's. Voorzie elk antwoord van een zorgvuldige motivatie. Als je een resultaat uit het dictaat gebruikt, vermeld dit dan expliciet (met de naam of het nummer van het resultaat) en laat ook zien dat aan alle voorwaarden van het resultaat voldaan is. Succes!

Opgave 1 [10 punten]

Zij $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ en $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ continu differentieerbaar (d.w.z., differentieerbaar met een continue afgeleide) en $g(x) \neq 0$ voor alle $x \in [a, b]$. Laat zien dat

$$\int_a^b \frac{f'(t)g(t) - f(t)g'(t)}{(g(t))^2} \, dt = \frac{f(b)}{g(b)} - \frac{f(a)}{g(a)}.$$

Toon hiermee aan dat voor alle $x \in [\frac{\pi}{2}, \pi)$ geldt

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^x \frac{1}{\sin^2(t)} \, dt = -\frac{\cos(x)}{\sin(x)}.$$

Opmerking: je mag aannemen dat de sinus en cosinus functies willekeurig vaak differentieerbaar zijn en de bekende uitdrukkingen voor de afgeleiden van deze functies gebruiken.

Opgave 2 [10 punten]

Zij $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gedefinieerd door

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{als } x = y \\ 1 & \text{als } x \neq y. \end{cases}$$

(a) Laat zien dat d een metriek op $\mathbb{R}$ definieert.

(b) Zij $\hat{\mathbb{R}}$ de metrische ruimte $(\mathbb{R}, d)$. Laat zien dat elke deelverzameling $A \subset \mathbb{R}$ open is in $\hat{\mathbb{R}}$.

(c) Laat zien dat elke functie $f : \hat{\mathbb{R}} \to \hat{\mathbb{R}}$ continu is.

Opgave 3 [14 punten]

Zij $(a_n)_{n \geq 0}$ een rij in $\mathbb{R}$ met $a_n > 0$ voor alle $n \in \mathbb{N}$. Stel dat

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1.$$

(a) Laat zien dat er een $0 < x < 1$ en $N \in \mathbb{N}$ bestaan zodat

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq x, \qquad \text{voor alle } n \geq N.$$

(b) Laat zien dat er een $C > 0$ en $0 < r < 1$ bestaan zodat

$$a_n \leq Cr^n, \qquad \text{voor alle } n \geq N.$$

(c) Laat met behulp van deel (b) zien dat $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ convergeert.

Hint: laat zien dat de deelsommen een Cauchy-rij vormen.

(d) Geef een voorbeeld (met bewijs) van een rij $(a_n)_{n\geq 0}$ met $a_n > 0$ voor alle $n \in \mathbb{N}$ en

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$$

zodat $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ divergeert.

(e) (voor 2 bonuspunten) Geef een voorbeeld (met bewijs) van een rij $(a_n)_{n\geq 0}$ met $a_n > 0$ voor alle $n \in \mathbb{N}$ en

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$$

zodat $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ convergeert.

Opgave 4 [11 punten]

Zij $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continu differentieerbaar. Neem aan dat er een *uniek* punt $x^* \in \mathbb{R}$ bestaat zodat $f'(x^*) = 0$. Neem aan dat f een lokaal minimum aanneemt in x^*. In deze opgave laten we zien dat f een globaal minimum in x^* aanneemt, d.w.z., $f(x) \geq f(x^*)$ voor alle $x \in \mathbb{R}$.

(a) Stel dat er een $\hat{x} > x^*$ bestaat zodat $f(\hat{x}) < f(x^*)$. Laat met behulp van de stelling van Rolle zien dat er een $x^* < \tilde{x} < \hat{x}$ bestaat zodat

$$f(\hat{x}) < f(x^*) < f(\tilde{x}).$$

(b) Bewijs nu met behulp van de middelwaardestelling dat f een globaal minimum in x^* aanneemt.

Hint: teken eerst een plaatje van de situatie in deel (a).