Herkansing Lineaire algebra 2 (WISB108)
Dinsdag 20 april 2021 15.15-18.15

Docent: *Barbara van den Berg*

- Schrijf je naam en studentnummer op elk vel.
- Het gebruik van het dictaat en college-aantekeningen is toegestaan. Het gebruikt van andere hulpmiddelen zoals telefoons, laptops, rekenmachines of andere bronnen is **NIET** toegestaan.
- Geef niet alleen antwoorden, maar laat bij elke (deel)opgave duidelijk zien hoe je aan je antwoorden komt en waarom je antwoord voldoet.

Opgave 1

(*25 punten*) Laat $C(\mathbb{R})$ de vectorruimte zijn van continue functies op $\mathbb{R}$ en laat V de lineaire deelruimte zijn van $C(\mathbb{R})$ opgespannen door de drie functies 1, e^x en e^{2x}. Voor het vervolg van de opgave hoef je niet te bewijzen dat deze drie functies onafhankelijk zijn in $C(\mathbb{R})$. Definieer de lineaire afbeelding:

$$A : V \to V$$

als volgt: als $a, b, c \in \mathbb{R}$ dan is:

$$A(a + be^x + ce^{2x}) = 2a + (3a + 2b + c)e^x + (6a - b + 4c)e^{2x}.$$

Ga na of de afbeelding A diagonaliseerbaar is. Zo ja, geef een basis B van V zodat A_B^B diagonaal is. Zo nee, laat zien waarom A niet diagonaliseerbaar is.

Opgave 2

(a). (*13 punten*) Vind alle oplossingen van de differentiaalvergelijking

$$y'' + 4y' + 5y = 10x + 3.$$

(b). (*7 punten*) Is de oplossingsverzameling van de differentiaalvergelijking uit (a) een lineaire deelruimte van $C(\mathbb{R})$, de vectorruimte van continue functies op $\mathbb{R}$? Zo nee, waarom niet? Zo ja, wat is de dimensie van de lineaire deelruimte?

Opgave 3

Laat $\mathbb{R}[X]_{\leq 1}$ de ruimte zijn van polynomen van graad hoogstens één. We definiëren een inproduct $\langle , \rangle$ op $\mathbb{R}[X]_{\leq 1}$ als volgt: als $P(X), Q(X) \in \mathbb{R}[X]_{\leq 1}$ dan is

$$\langle P(X), Q(X) \rangle = \int_0^1 P(X)Q(X)dX.$$

(a). (*9 punten*) Is de basis $E = \{1, X\}$ orthonormaal ten opzichte van dit inproduct? Zo niet, vul dan de eerste basisvector $P(X) = 1$ aan tot een orthonormale basis B volgens de Gram Schmidt methode (geef hierbij expliciet alle berekeningen die je gebruikt).

(b). (*6 punten*) We definiëren de lineaire afbeelding $A : \mathbb{R}[X]_{\leq 1} \to \mathbb{R}[X]_{\leq 1}$ als volgt:

$$A(1) = 1 + 6X \text{ en } A(X) = 5X.$$

Laat zien dat de matrix van A ten opzichte van de orthonormale basis B uit (a) gelijk is aan

$$\begin{pmatrix} 4 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 2 \end{pmatrix}.$$

(c). (*5 punten*) Geef een argument waarom de afbeelding $A : \mathbb{R}[X]_{\leq 1} \to \mathbb{R}[X]_{\leq 1}$ diagonaliseerbaar is zonder eigenwaarden en eigenvectoren uit te rekenen.

(d). (*10 punten*) Geef een orthonormale basis B' van $\mathbb{R}[X]_{\leq 1}$ zodat de matrix van de afbeelding A ten opzichte van B' diagonaal is.

Opgave 4

Welke van de volgende beweringen zijn waar? NB: bewijs je bewering! Dat wil zeggen: als je een tegenvoorbeeld geeft, laat dan zien waarom je voorbeeld voldoet, en als de bewering waar is, geef dan een bewijs van de bewering.

(a). (*8 punten*) Laat V een eindig dimensionale vectorruimte zijn met inproduct en $A : V \to V$ een lineaire afbeelding. Als alle eigenwaarden van A gelijk zijn aan ± 1, dan is A een orthogonale afbeelding.

(b). (*9 punten*) Laat V een vectorruimte zijn van eindige dimensie met inproduct $\langle , \rangle$. Laat W een lineaire deelruimte zijn van V met dimensie ongelijk aan 0. Laat P_W de orthogonale projectie zijn van V op W. Dan geldt voor alle $\mathbf{v} \in V$: $P_W(\mathbf{v}) = \mathbf{v}$ dan en slechts dan als $\mathbf{v} \in W$.

(c). (*8 punten*) Laat M een $n \times n$ matrix zijn. Als $\mathbb{R}^n$ een orthonormale basis heeft van eigenvectoren van M met reële eigenwaarden, dan is M symmetrisch.