WISB108 Infi 2 tentamen
Uitwerking met *aanvullend commentaar*

Aanwijzingen

- Geef altijd een duidelijke uitwerking met voldoende tekst-uitleg. Alleen een antwoord zonder motivatie is altijd fout, en alleen formules meestal ook.
- Werk rustig, netjes en duidelijk.
- Zorg dat je uitwerking maar één interpretatie toelaat.
- Je kunt alle (deel)vragen onafhankelijk van elkaar maken, ook als een eerdere (deel)vraag niet gelukt is.
- Alle informatie op dit opgavenblad mag bij alle (deel)opgaven gebruikt worden.
- Je mag gebruik maken van het dictaat, overig cursusmateriaal in de Infi-map van de cursus op Teams, en eigen aantekeningen. Gebruik van andere hulpbronnen is niet toegestaan. Je moet een verklaring ondertekenen dat je je hieraan houdt.
- Let extra goed op leesbaarheid (ivm scannen).
- **Inleveren:** op Blackboard bij Assessments. Lever precies één pdf-bestand in. Gebruik de bestandsnaam INFI2_Achternaam_studentnummer.pdf.
- Bij vragen, twijfel over de regels, of logistieke problemen kun je per Teams of email contact opnemen met Steven (@Steven of s.a.wepster@gmail.com) of met Jetze (@Jetze of j.zoethout@uu.nl).
- Totaal 32 punten.

Normering

100% Uitwerking is correct, efficiënt en getuigt van een goed begrip van de theorie. Het is helder opgeschreven met voldoende toelichting. Een onbelangrijk rekenfoutje kan misschien door de vingers gezien worden.

75% Grote lijn begrepen, maar technische vaardigheid schiet tekort;
signaleert falende *sanity checks* maar is niet in staat de problemen op te lossen;
maakt meerdere fouten (al dan niet door slordigheid);
geeft wel enige uitleg maar niet voldoende;
gebruikt verwerpelijke notaties.

50% Weet ongeveer wat te doen maar lijdt aan gebrek aan vaardigheid en/of inzicht;
mist belangrijke gevalsonderscheidingen of uitzonderingen etc.;
herkent evident foute tussenresultaten niet;
toont onvoldoende vaardigheid/controle/zelfreflectie.
Een combinatie van meerdere bij 75% genoemde tekortkomingen kan ook leiden tot deze normering.

25% Aardig beginnetje maar het levert niet echt wat op, of: een combinatie van meerdere bij 50% genoemde tekortkomingen.

0% Geen idee wat te doen, of: geeft alleen formules zonder uitleg en de opgave vereiste meer dan alleen simpel rekenwerk.

Opmerking: indien *ernstige* fouten gemaakt worden op het gebied van vwo-voorkennis (kettingregel vergeten, slechte beheersing gonio, . . .) kan de normering een punt lager uitvallen dan anders het geval zou zijn geweest.

Print en onderteken deze verklaring, of schrijf de verklaring over en onderteken.

Verklaring
Hierbij verklaar ik dat ik de uitwerkingen bij dit tentamen zelf heb gemaakt zonder hulp van andere personen of van hulpmiddelen anders dan het dictaat, overig cursusmateriaal in de Infi-map van de cursus op Teams, en eigen aantekeningen.

2 februari 2021, naam en handtekening:

---

1. Bereken $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^2} \frac{\mathrm{d}(x,y)}{(1+x^2+y^2)^{3/2}}$. 4 pt.

Uitwerking: We kunnen dit het makkelijkste doen in poolcoördinaten:

$$x^2+y^2=r^2, \quad \mathrm{d}(x,y)=r\,\mathrm{d}(r,\theta)$$

en integratiegebied $[0,\infty)\times[0,2\pi]$. We krijgen dan:

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^2} \frac{\mathrm{d}(x,y)}{(1+x^2+y^2)^{3/2}} &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} \frac{r}{(1+r^2)^{3/2}}\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta \\ &= 2\pi\cdot -(1+r^2)^{-1/2}\Big|_0^{\infty} \\ &= 2\pi,\end{aligned}$$

want $\lim_{r\to\infty}(1+r^2)^{-1/2}=0$.
We dachten een makkelijk inkoppertje aan het begin te zetten maar blijkbaar heeft nog niet iedereen een Pavlov-reactie ontwikkeld bij x^2+y^2, en ook weet niet iedereen hoe je $\mathbb{R}^2$ parametriseert in poolcoördinaten (bij een open boektentamen nog wel, je kunt het zo opzoeken). Als één of beide voor jou opgaan dan zit je nog niet goed genoeg in de stof.

2. Zij $\boldsymbol{\alpha}=(a,b,c)$ een constante vector en $\boldsymbol{r}=(x,y,z)$ een vectorveld. 4 pt.
Bepaal $\nabla\times(\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{r})$.

Uitwerking: We berekenen eerst:

$$\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{r}=\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}bz-cy\\cx-az\\ay-bx\end{pmatrix}.$$

Daarmee krijgen we:

$$\nabla\times(\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{r})=\begin{pmatrix}\partial_x\\\partial_y\\\partial_z\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}bz-cy\\cx-az\\ay-bx\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\partial_y(ay-bx)-\partial_z(cx-az)\\\partial_z(bz-cy)-\partial_x(ay-bx)\\\partial_x(cx-az)-\partial_y(bz-cy)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2a\\2b\\2c\end{pmatrix}=2\boldsymbol{\alpha}.$$

*Dit was een probleemloze opgave voor de meesten. Let er wel op dat je een antwoord als $(2a,0,2c)^t$ direct moet herkennen als **verdacht**, omdat de symmetrie mank gaat.*

3. Een kromme $\mathcal{C}$ is geparametriseerd door $\boldsymbol{r}\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3,\ t\mapsto\big(\cos\pi t,\ te^{-2t},\ \sin\pi t\big)$. 4 pt.
Vind alle coördinaten waar de raaklijn aan de kromme evenwijdig is aan één van de drie coördinaatassen (x-as, y-as of z-as).

Uitwerking: De richting van de raaklijn wordt gegeven door

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = (-\pi \sin \pi t,\ (1-2t)\mathrm{e}^{-2t},\ \pi \cos \pi t).$$

Om evenwijdig te zijn aan de x-as zoeken we een vector die een (niet-0) veelvoud is van $(1,0,0)$. Analoog voor y- en z-as. We zoeken dus raakvectoren waarvan precies twee coördinaten nul zijn. Maar $\sin t = \cos t = 0$ heeft geen oplossingen dus de eerste en derde coördinaat zijn nooit tegelijk nul. We moeten dus eisen dat in ieder geval de tweede coördinaat nul is en dit gebeurt precies dan als $t = \frac{1}{2}$. We vinden

$$\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{r}(\tfrac{1}{2}) = (-\pi, 0, 0),$$

dit is evenwijdig aan de x-as. Dus in het punt

$$\boldsymbol{r}(\tfrac{1}{2}) = (0, \tfrac{1}{2\mathrm{e}}, 1)$$

is de raaklijn evenwijdig aan de x-as en blijkbaar zijn er verder geen punten die aan de eis voldoen.
Een opvallend groot aantal studenten weet nog niet wanneer een vector evenwijdig is aan één van de coördinaatassen. Ook werden er (te) veel fouten gemaakt bij het differentiëren.

4. Zij $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ gegeven door $f(x,y,z) = axy^2 + byz + cx^3z^2$. Men bekijkt de richtingsafgeleide van f in het punt $(1,2,-1)$ in alle mogelijke richtingen $\hat{\boldsymbol{u}}$. Deze richtingsafgeleide blijkt een maximum 64 te hebben in de richting $(0,0,1)$. Bepaal a, b en c. 4 pt.

Uitwerking: Volgens stelling 10.16 wordt de richtingsafgeleide in de richting $\hat{\boldsymbol{u}}$ gegeven door $D_{\hat{\boldsymbol{u}}}f(1,2,-1) = \hat{\boldsymbol{u}} \cdot \nabla f(1,2,-1)$. Dit inproduct is maximaal indien de beide vectoren parallel zijn (de richtingsafgeleide is maximaal in de richting van de gradiënt, staat in dictaat p. 134 bovenaan). We leiden hier twee dingen uit af:

(i) $\nabla f(1,2,-1)$ is een scalair veelvoud van $(0,0,1)$ en

(ii) $(0,0,1) \cdot \nabla f(1,2,-1) = 64$.

Maar (i) en (ii) samen is gewoon hetzelfde als $\operatorname{grad} f(1,2,-1) = (0,0,64)$.
We hebben hier

$$\nabla f = (ay^2 + 3cx^2z^2,\ 2axy + bz,\ by + 2cx^3z)$$

en dus

$$\nabla f(1,2,-1) = (4a + 3c,\ 4a - b,\ 2b - 2c).$$

We moeten dus a, b en c oplossen uit het stelsel:

$$\begin{aligned} 4a + 3c &= 0, \\ 4a - b &= 0, \\ 2b - 2c &= 64, \end{aligned}$$

oftewel door herschikken:

$$\begin{aligned} b &= 4a, \\ 4a &= 32 + c, \\ 32 + 4c &= 0. \end{aligned}$$

Hieruit lezen we van onder naar boven af dat $c = -8$, $a = 6$ en $b = 24$.
Je moet de concepten gradiënt en richtingsafgeleide goed begrijpen om de opgave te doorzien.

5. Zij $\mathcal{S}$ een glad oppervlak in $\mathbb{R}^3$ met gesloten rand $\mathcal{C}$, en $\boldsymbol{F}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ de gradient van een scalair veld f. Angela en Boris betwisten of 4 pt.

$$\int_{\mathcal{S}} \nabla \times \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_{\mathcal{C}} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s}.$$

Is dit correct? Leg uit waarom wel of geef een tegenvoorbeeld. (Gebruik van de stelling van Stokes, als je daarmee bekend bent, is voor deze opgave niet toegestaan.)

Uitwerking: Er is gegeven dat $\boldsymbol{F} = \nabla f$. Dus $\boldsymbol{F}$ is conservatief en er geldt $\nabla \times \boldsymbol{F} = \nabla \times \nabla f = \mathbf{0}$ (stelling 13.6, niet 14.8!). Dan is $\int_{\mathcal{S}} \nabla \times \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n} \mathrm{d}S = \int_{\mathcal{S}} 0 \, \mathrm{d}S = 0$. Maar ook $\int_{\mathcal{C}} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = 0$; immers $\mathcal{C}$ is gesloten, we hebben dus een kringintegraal in een conservatief veld (stelling 14.7). Dus beide integralen zijn 0, ze zijn aan elkaar gelijk, dus de bewering is correct.
*Dat uit $\nabla \times \boldsymbol{F} = \mathbf{0}$ volgt dat de integraal nul is hoef je niet heel uitgebreid te laten zien (is wel netjes). Maar op z'n minst moet er wel op een of andere manier te zien zijn dat je de nul**vector** krijgt.*
Het is een keiharde logica-fout om op grond van stelling 14.8 te concluderen dat $\nabla \times \boldsymbol{F} = \mathbf{0}$.
Om stelling 14.7 te kunnen inzetten moet je in ieder geval eerst opmerken dat $\boldsymbol{F}$ conservatief is. De stelling vereist ook een samenhangend domein van $\boldsymbol{F}$ en hieraan is voldaan want het domein is $\mathbb{R}^3$, maar daar zijn we soepel in geweest.

6. Bereken de flux van het veld $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$ door het oppervlak $\mathcal{S}$ met parametrisering $\boldsymbol{\Psi}\colon [0, 2\pi]^2 \to \mathbb{R}^3$ gegeven door 6 pt.

$$\boldsymbol{\Psi}(u, v) = (\cos u(a + \cos v),\ \sin u(a + \cos v),\ \sin v)\,,$$

waarin $a \geq 1$ een constante.

Uitwerking: We berekenen

$$\partial_u \boldsymbol{\Psi} = (-\sin u(a+\cos v),\ \cos u(a+\cos v),\ 0)$$

en

$$\partial_v \boldsymbol{\Psi} = (-\cos u \sin v,\ -\sin u \sin v,\ \cos v)$$

en daarmee

$$\begin{aligned}
\partial_u \boldsymbol{\Psi} \times \partial_v \boldsymbol{\Psi} &= (\cos u \cos v(a+\cos v),\ \sin u \cos v(a+\cos v),\ \sin v(a+\cos v)) \\
&= [a+\cos v]\,(\cos u \cos v,\ \sin u \cos v,\ \sin v)\,.
\end{aligned}$$

Vervolgens berekenen we

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{r}(\boldsymbol{\Psi}(u,v)) \boldsymbol{\cdot} (\partial_u \boldsymbol{\Psi} \times \partial_v \boldsymbol{\Psi}) \\
&= [a+\cos v]\,(\cos u(a+\cos v),\ \sin u(a+\cos v),\ \sin v) \\
&\qquad\qquad \boldsymbol{\cdot}\,(\cos u \cos v,\ \sin u \cos v,\ \sin v) \\
&= (a+\cos v)(\cos v(a+\cos v)+\sin^2 v) \\
&= (a+\cos v)(1+a\cos v) \\
&= a+(1+a^2)\cos v + a\cos^2 v.
\end{aligned}$$

De flux is

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{S}} \boldsymbol{r} \boldsymbol{\cdot} \mathrm{d}\boldsymbol{S} &= \int_{[0,2\pi]^2} \boldsymbol{r}(\boldsymbol{\Psi}(u,v)) \boldsymbol{\cdot} (\partial_u \boldsymbol{\Psi} \times \partial_v \boldsymbol{\Psi})\,\mathrm{d}(u,v) \\
&= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}u \int_0^{2\pi} a+(1+a^2)\cos v + a\cos^2 v\,\mathrm{d}v \\
&= 2a\pi \int_0^{2\pi} 1+\cos^2 v\,\mathrm{d}v \quad \text{(want de integraal over } \cos v \text{ is 0)} \\
&= 2a\pi(2\pi+\pi) = 6a\pi^2.
\end{aligned}$$

In de één-na-laatste stap gebruikten we dat

$$\int_0^{2\pi} \cos^2 v\,\mathrm{d}v = \int_0^{2\pi} \sin^2 v\,\mathrm{d}v = \tfrac{1}{2}\int_0^{2\pi} \sin^2 v + \cos^2 v\,\mathrm{d}v.$$

Een lange opgave met veel rekenwerk, waarbij het vooral aankomt op je goniometrische behendigheid en die was niet bij iedereen op orde!
Sommige studenten hebben de haakjes verkeerd gelezen, dus als $\cos(u(a+\cos v))$. *Dit maakt het rekenwerk een stuk makkelijker, omdat* $\partial_u \boldsymbol{\Psi} \times \partial_v \boldsymbol{\Psi}$ *in dat geval evenwijdig is aan het xy-vlak en er minder gonio vereenvoudigd hoeft te worden. Een correcte uitwerking van deze versie levert maximaal 4 punten op.*

7. In deze opgave is $\mathcal{H}$ het gebied in $\mathbb{R}^2$ met $x \geq a > 0$. We gebruiken een coördinaten-

transformatie gegeven door

$$x^2 + y^2 = u^2 + a^2, \qquad y = vx.$$

De lijnen $u =$ constant en $v =$ constant staan in de figuur hieronder.

a. Laat zien dat $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \dfrac{u}{1+v^2}$. 3 pt.

Uitwerking: Er zijn veel manieren om dit te doen en de meest voor de hand liggende is bepaald niet de makkelijkste! We bespreken vier manieren.

- rechtstreeks: we schrijven $x^2(1+v^2) = u^2 + a^2$ waarmee we x en y als functies van u en v kunnen geven:

$$x = \sqrt{\frac{u^2+a^2}{1+v^2}} \qquad (x > 0 \text{ dus de } +\text{-wortel}),$$
$$y = v\sqrt{\frac{u^2+a^2}{1+v^2}}.$$

  Hiermee kunnen we de Jacobiaan uitrekenen maar het is veel werk en lastig, we doen het liever anders.
  *Maar **als** je het op die manier doet, gebruik dan dat $y = vx$ en dus $\frac{\partial y}{\partial v} = x + v\frac{\partial x}{\partial v}$, en gebruik dat je tegen die tijd $\frac{\partial x}{\partial v}$ al hebt!*

- omgekeerd: we gebruiken dat $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \left(\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right)^{-1}$. We schrijven dus

$$u = \sqrt{x^2+y^2-a^2} \qquad (x > a \text{ dus de } +\text{-wortel}),$$
$$v = y/x.$$

  Vervolgens vinden we

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \partial_x u\,\partial_y v - \partial_y u\,\partial_x v = \tfrac{x}{u}\tfrac{1}{x} - \tfrac{y}{u}\tfrac{-y}{x^2} = \tfrac{1}{u} + \tfrac{v^2}{u} = \tfrac{1+v^2}{u}.$$

  Dus inderdaad $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \dfrac{u}{1+v^2}$.

- impliciet differentiëren van de gegeven transformatie geeft

$$2x\,\mathrm{d}x + 2y\,\mathrm{d}y = 2u\,\mathrm{d}u, \qquad \mathrm{d}y = v\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}v,$$

  dus

$$\mathrm{d}u = \tfrac{x}{u}\,\mathrm{d}x + \tfrac{y}{u}\,\mathrm{d}y, \qquad \mathrm{d}v = -\tfrac{v}{x}\,\mathrm{d}x + \tfrac{1}{x}\,\mathrm{d}y,$$

  wat we in matrixvorm schrijven als

$$\begin{pmatrix}\mathrm{d}u\\ \mathrm{d}v\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{x}{u} & \frac{y}{u}\\ -\frac{v}{x} & \frac{1}{x}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathrm{d}x\\ \mathrm{d}y\end{pmatrix}.$$

  De matrix daarin heeft determinant

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \frac{1}{u} + \frac{vy}{ux} = \frac{1+v^2}{u};$$

  verder als bij de tweede optie.

- Enkele studenten vonden nog een andere optie die we erg waarderen. De substitutie lijkt namelijk een beetje op poolcoördinaten en daar kun je handig gebruik van maken. Met poolcoördinaten geldt:

  $$(r, \theta) = (\sqrt{u^2 + a^2},\ \arctan v).$$

  (Merk op dat dit goed gaat omdat $-\pi < \theta < \pi$ in $\mathcal{H}$, anders zouden we gedoe krijgen met θ.) Met de kettingregel krijgen we:

  $$\begin{aligned}\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} &= \frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}\frac{\partial(r,\theta)}{\partial(u,v)} \\ &= r\,(\partial_u r\,\partial_v\theta - \partial_v r\,\partial_u\theta) \\ &= r(\tfrac{2u}{2r}\tfrac{1}{1+v^2} - 0) = \frac{u}{1+v^2}.\end{aligned}$$

  Helaas kozen de meeste studenten de lelijkste rechtsreekse route.

b. Gebruik bovenstaande transformatie om te laten zien dat 3 pt.

$$\int_{\mathcal{H}} \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}(x,y) = a\mathrm{e}^{-a^2}\int_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{-u^2}}{a^2+u^2}\,\mathrm{d}u.$$

Uitwerking: We zullen eerst nagaan wat de integratiegrenzen van $\mathcal{H}$ in de nieuwe coördinaten zijn. Beschouw een punt op de lijn $x = a$ met $y > 0$, bijvoorbeeld het dikke blauwe punt in de figuur. De coördinaten van dit punt zijn $(x, y) = (a, y)$. Het kwadraat van de lengte van de schuine zijde is $x^2 + y^2 = a^2 + y^2 = a^2 + u^2$ volgens de definitie van de nieuwe coördinaten. Dus voor het blauwe punt geldt behalve $x = a$ ook $y = u$. Daarnaast geldt voor dit punt: $v = y/x = u/a$.
Afhankelijk van de integratievolgorde zijn er nu twee manieren om de integraal op te stellen. De ene mogelijkheid is alle cirkelbogen ($u =$ constant) doorlopen van $v = -u/a$ tot $v = +u/a$:

$$\begin{aligned}&\int_{\mathcal{H}} \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}(x,y) \\ &= \int_0^\infty\int_{-u/a}^{u/a} \frac{u}{1+v^2}\mathrm{e}^{-u^2-a^2}\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}u \\ &= \mathrm{e}^{-a^2}\int_0^\infty 2\arctan\tfrac{u}{a}\cdot u\mathrm{e}^{-u^2}\,du \\ &= \mathrm{e}^{-a^2}\left(-\arctan\tfrac{u}{a}\cdot\mathrm{e}^{-u^2}\Big|_0^\infty - \int_0^\infty -\frac{1/a}{1+(u/a)^2}\mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u\right),\end{aligned}$$

door partieel integreren. Maar $\lim_{u\to\infty}\mathrm{e}^{-u^2} = 0$ en $\arctan 0 = 0$, dus de eerste term verdwijnt, en in de resterende term vermenigvuldigen we teller en noemer met a^2 waarna we een factor a buiten de integraal kunnen halen:

$$\mathrm{e}^{-a^2}\int_0^\infty \frac{a}{a^2+u^2}\mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u = a\mathrm{e}^{-a^2}\int_0^\infty \frac{1}{a^2+u^2}\mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u,$$

hetgeen te bewijzen was.

De tweede mogelijkheid is alle stralen (v = constant) doorlopen vanaf $u = av$ tot $u \to \infty$:

$$
\begin{aligned}
&\int_{\mathcal{H}} \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}(x,y) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{av}^{\infty} \frac{u}{1+v^2} \mathrm{e}^{-u^2-a^2}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v \\
&= \mathrm{e}^{-a^2} \int_{-\infty}^{\infty} \tfrac{1}{2} \frac{\mathrm{e}^{-a^2v^2}}{1+v^2}\,\mathrm{d}v \\
&= \mathrm{e}^{-a^2} \int_{0}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{-a^2v^2}}{1+v^2}\,\mathrm{d}v.
\end{aligned}
$$

Indien we nu een nieuwe $\tilde{u}$ invoeren volgens de substitutie $\tilde{u} = av$, met $\mathrm{d}\tilde{u} = a\mathrm{d}v$, krijgen we wederom het te bewijzen resultaat.

Invullen van de substitutie en de Jacobiaan is triviaal en levert nog geen punten op. De pret begint pas bij de integratiegrenzen: aan de figuur is duidelijk te zien dat de grenzen van u en v op een of andere manier met elkaar te maken moeten hebben. Als je onafhankelijke grenzen neemt maak je dus een fout die met wat reflectie makkelijk te herkennen is, zeker als je niet op het juiste antwoord uitkomt. Zoals gezegd: succes bij meervoudige integralen begint met de juiste parametrisering van het gebied!