WISB108 Infi 2 hertentamen
Maandag 19 april 2021, 15:15 – 18:15

Aanwijzingen

- Geef altijd een duidelijke uitwerking met voldoende tekst-uitleg. Alleen een antwoord zonder motivatie is altijd fout, en alleen formules meestal ook.
- Werk rustig, netjes en duidelijk.
- Zorg dat je uitwerking maar één interpretatie toelaat.
- Je kunt alle (deel)vragen onafhankelijk van elkaar maken, ook als een eerdere (deel)vraag niet gelukt is.
- Alle informatie op dit opgavenblad mag bij alle (deel)opgaven gebruikt worden.
- **Je mag gebruik maken van het dictaat en van je eigengemaakte "spiekbrief" volgens de regeling op Blackboard. Andere hulpmiddelen zijn niet toegestaan.**
- Totaal 26 punten.

Normering

100% Uitwerking is correct, efficiënt en getuigt van een goed begrip van de theorie. Het is helder opgeschreven met voldoende toelichting. Een onbelangrijk rekenfoutje kan misschien door de vingers gezien worden.

75% Grote lijn begrepen, maar technische vaardigheid schiet tekort;
signaleert falende *sanity checks* maar is niet in staat de problemen op te lossen;
maakt meerdere fouten (al dan niet door slordigheid);
geeft wel enige uitleg maar niet voldoende;
gebruikt verwerpelijke notaties.

50% Weet ongeveer wat te doen maar lijdt aan gebrek aan vaardigheid en/of inzicht;
mist belangrijke gevalsonderscheidingen of uitzonderingen etc.;
herkent evident foute tussenresultaten niet;
toont onvoldoende vaardigheid/controle/zelfreflectie.
Een combinatie van meerdere bij 75% genoemde tekortkomingen kan ook leiden tot deze normering.

25% Aardig beginnetje maar het levert niet echt wat op, of: een combinatie van meerdere bij 50% genoemde tekortkomingen.

0% Geen idee wat te doen, of: geeft alleen formules zonder uitleg en de opgave vereiste meer dan alleen simpel rekenwerk.

Opmerking: indien *ernstige* fouten gemaakt worden op het gebied van vwo-voorkennis (kettingregel vergeten, slechte beheersing gonio, ...) kan de normering een punt lager uitvallen dan anders het geval zou zijn geweest.

Alleen voor wie het tentamen niet in de tentamenzaal maakt

- Zorg dat je goed in beeld bent en blijft op Teams.
- Let extra goed op leesbaarheid van je uitwerking (ivm scannen).
- Inleveren op Blackboard bij Assessments. Lever precies één pdf-bestand in.
- Bij vragen, twijfel over de regels, of logistieke problemen kun je per Teams of email contact opnemen met Steven (@Steven of s.a.wepster@gmail.com) of Marloes van Bokhoven (@Marloes of m.l.vanbokhoven@uu.nl).
- Print en onderteken de verklaring, of schrijf de verklaring over en onderteken.

Verklaring
Hierbij verklaar ik dat ik de uitwerkingen bij dit tentamen zelf heb gemaakt zonder hulp van andere personen of van hulpmiddelen anders dan het dictaat, overig cursusmateriaal in de Infi-map van de cursus op Teams, en eigen aantekeningen.

19 april 2021, naam en handtekening:

---

1. Bereken het volume ingesloten tussen de twee oppervlakken $z = 12-2x^2-y^2$ en $z = x^2+2y^2$. 4 pt.

Uitwerking: Allebei de vergelijkingen stellen een paraboloïde voor, waarbij $z = 12 - 2x^2 - y^2$ de bolle kant naar boven heeft, en $z = x^2+2y^2$ heeft de bolle kant naar beneden. De doorsnijding van de twee oppervlakken vinden we door de twee vergelijkingen aan elkaar gelijk te stellen:

$$12 - 2x^2 - y^2 = x^2 + 2y^2,$$

wat neerkomt op

$$3(x^2 + y^2) = 12,$$

oftewel $x^2 + y^2 = 4$. Binnen deze cirkel vinden we de hoogte van het volume door het verschil te nemen van de z-coördinaten op het boven- en ondervlak. Het verschil is

$$12 - 3(x^2 + y^2).$$

We kunnen dus het volume berekenen met de volgende integraal, waar we als eerste stap direct cylindercoördinaten (of poolcoördinaten) in substitueren:

$$\begin{aligned}
\text{Volume} &= \int_{x^2+y^2\le 4} (12 - 3x^2 - 3y^2)\,\mathrm{d}(x,y) \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^2 r(12-3r^2)\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta \\
&= 2\pi\,(6r^2 - \tfrac{3}{4}r^4)\Big|_0^2 \\
&= 2\pi\cdot(24-12) = 24\pi.
\end{aligned}$$

Opvallend (om niet te zeggen onthutsend) dat er nog studenten rondlopen die dit zonder cylindercoordinaten proberen te klaren. Zie ook de opmerking hierover bij de uitwerking van opgave 1 in het eerste tentamen.

2. Bereken de booglengte van de kromme met vergelijking $4y^2 = x^3$ tussen $y = -\frac{1}{2}$ en $y = \frac{1}{2}$. 4 pt.

Uitwerking: Eerst parametriseren; kies bijvoorbeeld

$$\boldsymbol{r}(t) = (t^2, \tfrac{1}{2}t^3),$$

zodat $x^3 = (t^2)^3 = t^6$ en ook $4y^2 = 4\cdot(\frac{1}{2}t^3)^2 = t^6$. We voldoen aan de eis $-\frac{1}{2} \le y \le \frac{1}{2}$ door te nemen $-1 \le t \le 1$. De booglengte s vinden we nu door de formule in het dictaat in te vullen:

$$
\begin{aligned}
s &= \int_{-1}^{1} \left\| \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} \right\| \,\mathrm{d}t \\
&= \int_{-1}^{1} \sqrt{(2t)^2 + (\tfrac{3}{2}t^2)^2}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_{-1}^{1} \sqrt{4t^2 + \tfrac{9}{4}t^4}\,\mathrm{d}t \\
&= 2\int_{0}^{1} 2t\sqrt{1 + \tfrac{9}{16}t^2}\,\mathrm{d}t \\
&= 2 \cdot \tfrac{16}{9} \cdot \tfrac{2}{3} \left(1 + \tfrac{9}{16}t^2\right)^{3/2} \Big|_0^1 \\
&= \tfrac{64}{27} \left((\tfrac{25}{16})^{3/2} - 1 \right) \\
&= \tfrac{64}{27} \left((\tfrac{5}{4})^3 - (\tfrac{4}{4})^3 \right) \\
&= \tfrac{64}{27} \cdot \tfrac{125-64}{64} = \tfrac{61}{27}.
\end{aligned}
$$

De meeste studenten proberen een parametrisatie met $(4t^{2/3}, t)$ *of iets in die richting. Vanuit de vergelijking van de kromme ligt dat misschien voor de hand, maar gebroken exponenten rekenen niet zo fijn en daar ging dan ook menigeen mee de mist in. De eerste parametrisering is niet altijd de beste.*

3. Zij $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differentieerbaar. Definieer de functie $u = g(x,y)$ door 4 pt.

$$u = g(x,y) = xyf(\frac{x+y}{xy}).$$

Laat zien dat voor een geschikt gekozen functie h geldt:

$$x^2\frac{\partial u}{\partial x} - y^2\frac{\partial u}{\partial y} = h(x,y)u.$$

Uitwerking: Allereerst merken we op dat $\dfrac{x+y}{xy} = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}$; dit maakt het differentiëren een stuk makkelijker. Laten we dan $\frac{\partial u}{\partial x}$ en $\frac{\partial u}{\partial y}$ berekenen:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(xyf(\tfrac{1}{x}+\tfrac{1}{y})\right) = yf(\tfrac{1}{x}+\tfrac{1}{y}) + xyf'(\tfrac{1}{x}+\tfrac{1}{y}) \cdot \frac{-1}{x^2}, \\
\frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(xyf(\tfrac{1}{x}+\tfrac{1}{y})\right) = xf(\tfrac{1}{x}+\tfrac{1}{y}) + xyf'(\tfrac{1}{x}+\tfrac{1}{y}) \cdot \frac{-1}{y^2}.
\end{aligned}
$$

Daarmee krijgen we, na wat herschrijven:

$$x^2\frac{\partial u}{\partial x} - y^2\frac{\partial u}{\partial y} = (x-y)xyf(\tfrac{1}{x}+\tfrac{1}{y});$$

immers de termen met f' erin vallen precies tegen elkaar weg. Blijkbaar moeten we $h(x,y) = x - y$ nemen en dan is aan het gestelde voldaan.

De kettingregel toepassen op $f(\frac{x+y}{xy})$ *is een basisvaardigheid die je goed moet beheersen, maar dat was voor velen een struikblok.*

4. Zij $\boldsymbol{F}$ een glad vectorveld op $\mathbb{R}^3$. Waar of niet waar: indien $\boldsymbol{F}$ tegelijk rotatievrij en divergentievrij is, dan heeft $\boldsymbol{F}$ een potentiaal die harmonisch is. Indien waar: bewijs. Indien niet waar: geef een tegenvoorbeeld. 4 pt.

> **Uitwerking:** Dit is waar. De redenering loopt als volgt: $\boldsymbol{F}$ is glad op het enkelvoudig samenhangend gebied $\mathbb{R}^3$. Indien $\boldsymbol{F}$ rotatievrij (d.w.z.: $\nabla \times \boldsymbol{F} = \boldsymbol{0}$), dan geldt volgens stelling 14.8 dat $\boldsymbol{F}$ conservatief is. Dit betekent dat $\boldsymbol{F}$ een potentiaal heeft, zeg f, zodanig dat $\nabla f = \boldsymbol{F}$. Indien tevens geldt dat $\boldsymbol{F}$ divergentievrij is dan weten we dat $0 = \nabla \cdot \boldsymbol{F} = \nabla \cdot \nabla f$. Maar $\nabla \cdot \nabla$ is precies de Laplace-operator, dus f is harmonisch.
>
> *Het bestaan van een potentiaal van* $\boldsymbol{F}$ *werd te vaak voetstoots aangenomen, terwijl dat helemaal niet vanzelfsprekend is. Let op het verschil tussen stellingen 13.6 en 14.8!*

5. Bereken de flux van $\boldsymbol{F} = (z, x, -3y^2 z)$ door het oppervlak $\mathcal{S} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 16,\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ 0 \leq z \leq 5\}$. 4 pt.

> **Uitwerking:** Het oppervlak $\mathcal{S}$ is deel van een cylindermantel met straal 4 en evenwijdig aan de z-as. Dit betekent dat we de eenheids-normaalvector kunnen opschrijven als
>
> $$\hat{\boldsymbol{n}} = \tfrac{1}{4}(x, y, 0).$$
>
> In cylindercoördinaten kunnen we het oppervlak parametriseren met vaste $r = 4$ en $x = 4\cos\theta$, $y = 4\sin\theta$, tussen de grenzen $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ en $0 \leq z \leq 5$. Tot slot het oppervlakte-element $\mathrm{d}S = 4\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\theta$. In deze coördinaten hebben we
>
> $$\boldsymbol{F} \boldsymbol{\cdot} \hat{\boldsymbol{n}} = (z, 4\cos\theta, \dots) \boldsymbol{\cdot} (4\cos\theta, 4\sin\theta, 0) = 4z\cos\theta + 8\sin(2\theta).$$
>
> Zodoende vinden we de flux:
>
> $$\begin{aligned} \int_{\mathcal{S}} \boldsymbol{F} \boldsymbol{\cdot} \hat{\boldsymbol{n}}\,\mathrm{d}S &= 4\int_0^5 \int_0^{\pi/2} z\cos\theta + 2\sin 2\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z \\ &= 4\int_0^5 z\sin\theta - \cos 2\theta\big|_0^{\pi/2}\,\mathrm{d}z \\ &= 4\int_0^5 (z+2)\,\mathrm{d}z = 90. \end{aligned}$$
>
> *Ik heb heel wat parametrisaties voorbij zien komen die duidelijk niet* $\mathcal{S}$ *parametriseren. Bijvoorbeeld: niet* $r = 4$ *nemen maar* $0 \leq r \leq 4$*. In de meeste gevallen ben je kansloos als je al zo vroeg in de opgave op het verkeerde paard gaat zitten. Dus check jezelf altijd. En* begrijp *wat je aan het doen bent! Flux is altijd een dubbele integraal, niet enkel en niet tripel!*
>
> *Verrassend vaak werd een cylinder genomen met boven- en ondervlakken, terwijl boven- en ondervlak helemaal niet voldoen aan het voorschrift voor* $\mathcal{S}$ *(immers: er staat* $x^2 + y^2 = 16$*). Dat heeft geen aftrek opgeleverd, als je maar wel de flux door de mantel berekent.*

6. *De twee deelvragen zijn los van elkaar te maken.*

   Een kromme $\mathcal{C}$ heeft parametrisering $\boldsymbol{r}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $\boldsymbol{r}(t) = a\mathrm{e}^{kt}(\cos t, \sin t)$, waarin a en k positieve constanten zijn.

a. Zij α de hoek tussen de vector $\boldsymbol{r}(t)$ en de raaklijn aan de kromme op tijdstip t. Laat zien dat α constant is, d.w.z. onafhankelijk van t. (Hint: bereken bijvoorbeeld $\cos\alpha$ of $\tan\alpha$). 4 pt.

> **Uitwerking:** Bij deze parametrisering hebben we
>
> $$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = ak\mathrm{e}^{kt}(\cos t, \sin t) + a\mathrm{e}^{kt}(-\sin t, \cos t).$$
>
> De eerste term hierin is precies $k \cdot \boldsymbol{r}(t)$; in het bijzonder is de eerste term dus een vector parallel aan $\boldsymbol{r}$ met lengte $ak\mathrm{e}^{kt}$.
> De tweede term staat hier loodrecht op en heeft lengte $a\mathrm{e}^{kt}$.
> De hoek α tussen $\boldsymbol{r}$ en $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$ is dus gelijk aan een hoek in een rechthoekige driehoek waarvan de twee zojuist genoemde termen van $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$ de rechthoekszijden vormen. We zien hieraan dat $\tan\alpha = \frac{a}{ak} = \frac{1}{k}$. Aangezien k een constante is, is α blijkbaar constant.
> *Als je niet ziet dat $\boldsymbol{r}'$ zo mooi uiteen valt dan kan het nog steeds goed gaan, je hebt dan wat meer werk. Maar er geldt* niet *dat $\cos\alpha = \boldsymbol{r}'/\boldsymbol{r}$. Sowieso al niet omdat deling van twee vectoren geen operatie is, maar ook als je de normen van de vectoren deelt dan is de breuk nog niet $\cos\alpha$.*

b. Bij verandering van de constante a zal in het algemeen de kromme ook veranderen. Toch zijn er verschillende waarden van a die precies dezelfde kromme opleveren. Hoe hangen deze waarden van a met elkaar samen? 2 pt.

> **Uitwerking:** Zij n geheel. Wegens de periodiciteit van sin en cos geldt
>
> $$\boldsymbol{r}(t + 2n\pi) = a\mathrm{e}^{(k+2n\pi)t}(\cos t, \sin t) = \mathrm{e}^{2n\pi}\boldsymbol{r}(t).$$
>
> Alle omwentelingen van de spiraal zijn dus identiek op een schaalfactor $\mathrm{e}^{2n\pi}$ na. (Anders gezegd: een rechte lijn door de oorsprong snijdt de kromme in oneindig veel punten, en de radiale afstanden tussen twee opeenvolgende snijpunten schelen steeds een factor $\mathrm{e}^{2\pi}$.) De hele kromme wordt dus op zichzelf afgebeeld door de afstanden vanaf de oorsprong te vermenigvuldigen met een factor $\mathrm{e}^{2n\pi}$. Aangezien de constante a zelf ook fungeert als schaalfactor, geven alle constanten $a\mathrm{e}^{2n\pi}$ (voor alle $n \in \mathbb{N}$) dezelfde kromme.