Tentamen Numerieke Wiskunde (WISB251)[1]

30 januari 2020

Maak één opgave per vel en schrijf op ieder vel duidelijk je naam en studentnummer. Laat duidelijk zien hoe je aan de antwoorden komt. Onderstaande formules en stellingen mag je zonder bewijs gebruiken. Succes!

Handige formules en notatie

- **Representatiefout** zwevendekommagetallen: $\mathrm{fl}(x) = x(1+\epsilon) = x(1+\epsilon')^{-1}$ met $|\epsilon|, |\epsilon'| \leq \eta$.
- **Exacte afronding**: $\mathrm{fl}\left(\mathrm{fl}(x) \circ \mathrm{fl}(y)\right) = \left(\mathrm{fl}(x) \circ \mathrm{fl}(y)\right)(1+\epsilon)$ met $|\epsilon| \leq \eta$ en waarbij $\circ$ staat voor een van de elementaire rekenkundige operaties $+, -, *, /$.
- **Meerdere afrondfouten**: Gegeven $|\epsilon_i| \leq \eta$ en $n\eta < 1$, dan $\prod_{i=1}^{n}(1+\epsilon_i) = (1+\theta_n)$ met $|\theta_n| \leq \frac{n\eta}{1-n\eta}$.
- **Gedeelde differenties** (met $x_0 \leq x_1 \leq \ldots \leq x_n$)

$$f[x_i] = f(x_i), \quad f[x_i, x_j] = \frac{f[x_j] - f[x_i]}{x_j - x_i}, \quad f[x_i, x_j, x_k] = \frac{f[x_j, x_k] - f[x_i, x_j]}{(x_k - x_i)}.$$

$$f[x_0, \ldots, x_n] = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}, \, \xi \in [x_0, x_n].$$

- **Interpolatie** Gegeven een functie f en steunpunten $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$ zijn het interpolerende polynoom p_n en de bijbehorende foutterm e_n gegeven door:

$$p_n(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + \ldots + f[x_0, x_1, \ldots x_n] \prod_{i=0}^{n-1}(x - x_i),$$

$$e_n(x) = f(x) - p_n(x) = f[x_0, x_1, \ldots, x_n, x] \prod_{i=0}^{n}(x - x_i).$$

- **Middelwaardestelling**: Gegeven continue functies f en w waarbij w niet van teken wisselt op het interval $[a, b]$, dan is er een $\xi \in [a, b]$ waarvoor:

$$\int_a^b f(x) w(x) \,\mathrm{d}x = f(\xi) \int_a^b w(x) \,\mathrm{d}x.$$

- **Vastepuntstelling**: De iteratie

$$x_{k+1} = g(x_k),$$

  met $x_0 \in [a, b]$ convergeert linear naar een vast punt $x_* \in [a, b]$ als $|g'(x)| < 1$ op $[a, b]$. Als bovendien $g'(x_*) = 0$, dan convergeert de iteratie kwadratisch.
- **Vastepuntiteratie voor lineare stelsels**: De iteratie

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + M(\mathbf{b} - A\mathbf{x}_k),$$

  convergeert als de spectrale radius van $I - MA$ kleiner dan 1 is, oftewel $\rho(I - MA) < 1$.

2 pt. **vraag 1 - Afrondfouten** In deze opgave bekijken we de afrondfout in de berekening $y = \frac{1}{3} + \frac{1}{x}$. Je mag aannemen dat x een zwevendekommagetal is.

a) Laat zien dat de *relatieve fout* kan worden begrensd door

$$\frac{|\mathrm{fl}(y) - y|}{|y|} \leq \frac{2\eta}{1 - 2\eta} \frac{3 + |x|}{|3 + x|},$$

waarbij η de afrondeenheid is.

antwoord We moeten rekening houden met de deling (2x) en de optelling; dus 3 bronnen van afrondfouten. We hebben

$$\mathrm{fl}(y) = \left(\tfrac{1}{3} \cdot (1 + \epsilon_1) + x^{-1} \cdot (1 + \epsilon_2)\right)(1 + \epsilon_3) = \tfrac{1}{3} \cdot (1 + \theta_2) + x^{-1} \cdot (1 + \theta_2')$$

met $|\theta_n|, |\theta_n'| \leq n\eta/(1 - n\eta)$. Dus

$$|\mathrm{fl}(y) - y| \leq \frac{2\eta}{1 - 2\eta} \left(1/3 + 1/|x|\right).$$

Delen door $|y|$ en vereenvoudigen geeft het gewenste resultaat.

- $\frac{1}{2}$ pt: correct identificeren van de 3 bronnen van afrondfouten en toepassen stelling exacte afronding
- $\frac{1}{2}$ pt: correct toepassen van stelling over meerder afrondfouten, ongeacht of alle afrondfouten correct zijn geindentificeerd in de vorige stap.
- $\frac{1}{2}$ pt: correct afschatten van resultaat uit vorige stap (ongeacht of dat goed was of niet).

b) Voor welke waarde(n) van x is deze berekening problematisch?

antwoord Voor $x \approx -3$ wordt de relatieve fout erg groot (cancellatiefout) en voor $x \approx 0$ wordt $|y|$ te groot (overflow). Voor $|x|$ heel groot krijgen we mogelijk een underflow.

- $\frac{1}{4}$ pt: correct identificeren cancellatiefout
- $\frac{1}{4}$ pt: correct identificeren overflow / underflow

3 pt. **vraag 2 - Vastepuntiteratie** We gebruiken de volgende vastepuntiteratie:

$$x_{k+1} = x_k - 2\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

om de nulpunten te vinden van de functie

$$f(x) = (x-1)^2(x+1).$$

a) Convergeert de iteratie naar het nulpunt $x_* = 1$ wanneer $x_0 = 1 + \delta$ met $|\delta|$ klein genoeg ? Zoja, hoe snel (lineair of kwadratisch)? Beargumenteer ook duidelijk waarom.

antwoord We hebben een vastepuntiteratie met

$$g(x) = x - 2f(x)/f'(x) = x - 2\frac{(x-1)^2(x+1)}{2(x-1)(x+1) + (x-1)^2} = x - 2\frac{(x-1)(x+1)}{2(x+1) + x - 1} = x - 2\frac{x^2-1}{3x+1}.$$

. We hebben

$$g'(x) = 1 - 2\frac{2x(3x+1) - 3(x^2-1)}{(3x+1)^2} = 1 - 2\frac{3x^2+2x+3}{(3x+1)^2}$$

dus

$$g'(1) = 1 - 2\frac{8}{16} = 0,$$

dus kwadratische convergentie.

- $\frac{1}{2}$ pt: opstelle juiste vastepuntiteratie g
- $\frac{1}{2}$ pt: uitwerken afgeleide
- $\frac{1}{2}$ pt: gebruik van stelling $|g'| < 1$, dus convergentie
- $\frac{1}{2}$ pt: concludeer dat convergentie kwadratisch is omdat $g'(1) = 0$

b) Convergeert de iteratie naar het nulpunt $x_* = -1$ wanneer $x_0 = -1 + \delta$ met $|\delta|$ klein genoeg ? Zoja, hoe snel (lineair of kwadratisch)? Beargumenteer ook duidelijk waarom.

antwoord We hebben

$$g'(-1) = 1 - 2\frac{3-2+3}{4} = 1 - 2\frac{4}{4} = -1$$

, dus geen convergentie (we hebben $|g'| < 1$ nodig).

- $\frac{1}{2}$ pt: gebruik stelling
- $\frac{1}{2}$ pt: juiste conclusie

3 pt. **vraag 3 - Interpolatie en differentiatie** We gebruiken de volgende benadering van de afgeleide

$$f'(x_0) \approx p_2'(x_0) = \frac{-f(x_0+2h) + 4f(x_0+h) - 3f(x_0)}{2h}.$$

a) Stel het interpoleren polynoom p_2 met steunpunten $\{x_0, x_0+h, x_0+2h\}$ op en laat zien dat dit tot de gegeven benadering van de afgeleide van f op x_0 leidt.

antwoord Stel het interpolerende polynoom p_2 op:

$$p_2(x) = f[x_0] + f[x_0, x_0+h](x - x_0) + f[x_0, x_0+h, x+2h](x - x_0)(x - x_0 - h).$$

De afgeleide

$$p_2'(x) = f[x_0, x_0+h] + f[x_0, x_0+h, x+2h](x - x_0 + x - x - 0 - h).$$

Dus

$$p_2'(x_0) = f[x_0, x_0+h] - hf[x_0, x_0+h, x+2h] = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} - h\frac{\frac{f(x_0+2h)-f(x_0+h)}{h} - \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}}{2h}$$

dit geeft

$$p_2'(x_0) = \frac{(2f(x_0+h) - 2f(x_0)) - (f(x_0+2h) - f(x_0+h)) + (f(x_0+h) - f(x_0))}{2h}$$

wat overeenkomt met de gegeven benadering.

- $\frac{1}{2}$ pt: interpolerend polynoom opstellen
- $\frac{1}{2}$ pt: berekenen van de afgeleide en vereenvoudigen

b) Laat zien dat de fout is gegeven door

$$f'(x_0) - p_2'(x_0) = \tfrac{1}{3}h^2 f'''(\xi),$$

met $\xi \in [x_0, x_0 + 2h]$.

antwoord Druk nu de interpolatiefout uit:

$$e(x) = f(x) - p_2(x) = f[x_0, x_0+h, x_0+2h, x](x - x_0)(x - x_0 - h)(x - x_0 - 2h).$$

Bereken afgeleide:

$$e'(x) = g'(x)\phi_3(x) + g(x)\phi_3'(x).$$

Omdat $\phi_3(x_0) = 0$ krijgen we

$$e'(x_0) = f[x_0, x_0+h, x_0+2h, x_0]\phi_3'(x_0) = 2h^2 f[x_0, x_0+h, x_0+2h, x_0] = (2/6)h^2 f'''(\xi).$$

- $\frac{1}{2}$ pt: uitdrukken interpolatiefout
- $\frac{1}{2}$ pt: uitwerken afgeleide en vereenvoudigen

c) Gegeven $f(x) = \sin(x)$ en een $\epsilon > 0$, bepaal h zodat $|f'(x_0) - p_2'(x_0)| \leq \epsilon$ voor alle $x_0 \in [0, 2\pi]$.

antwoord We hebben

$$|e(x_0)| \leq (1/3)h^2,$$

dus kies $h \leq \sqrt{(}3\epsilon)$.

- $\frac{1}{2}$ pt: Bepaal bovengrens
- $\frac{1}{2}$ pt: berekenen van juiste h.

3 pt. **vraag 4 - Differentiaalvergelijkingen** We bekijken de volgende methode om een differentiaalvergelijking $u'(t) = f(u(t))$ op te lossen

$$\widetilde{u}_{n+1} = \widetilde{u}_n + 2hf(\widetilde{u}_n) - hf\big(\widetilde{u}_n - \tfrac{h}{2}f(\widetilde{u}_n)\big).$$

waarbij $\widetilde{u}_n$ een benadering is van $u(n \cdot h)$.

a) Laat zien dat de methode een truncatiefout van orde h^3 heeft.

antwoord

- $\frac{1}{2}$ pt: Taylor van de oplossing:

$$u(t+h) = u(t) + hu'(t) + \frac{h^2}{2}u''(t) + \frac{h^3}{6}u'''(\tau).$$

- $\frac{1}{2}$ pt:Herschrijf mbv van de DV als

$$u(t+h) = u(t) + hf(u(t)) + \frac{h^2}{2}f'(u(t))f(u(t)) + \frac{h^3}{6}u'''(\tau).$$

- $\frac{1}{2}$ pt: Taylor de methode

$$u_{n+1} = u_n + hf(u_n) + \frac{h^2}{2}f'(u_n)f(u_n) + \mathcal{O}(h^3).$$

- $\frac{1}{2}$ pt: De truncatiefout is dus gegeven door $\mathcal{O}(h^3)$.

b) Bepaal het stabiliteitsgebied van de methode.

antwoord Het stabiliteitsgebied is $|1 + z + z^2/2| < 1$.

- $\frac{1}{2}$ pt: Pas toe op de testvergelijking $u'(t) = \lambda u(t)$: $u_{n+1} = \big(1 + h\lambda + h^2\lambda^2/2\big)\, u_n$
- $\frac{1}{2}$ pt:lees stabiliteitsgebied af: $|1 + z + z^2/2| < 1$.