Tentamen Numerieke Wiskunde (WISB251)[1]

30 januari 2020

Maak één opgave per vel en schrijf op ieder vel duidelijk je naam en studentnummer. Laat duidelijk zien hoe je aan de antwoorden komt. Onderstaande formules en stellingen mag je zonder bewijs gebruiken. Succes!

Handige formules en notatie

- **Representatiefout** zwevendekommagetallen: $\mathrm{fl}(x) = x(1+\epsilon) = x(1+\epsilon')^{-1}$ met $|\epsilon|, |\epsilon'| \leq \eta$.
- **Exacte afronding**: $\mathrm{fl}\left(\mathrm{fl}(x) \circ \mathrm{fl}(y)\right) = \left(\mathrm{fl}(x) \circ \mathrm{fl}(y)\right)(1+\epsilon)$ met $|\epsilon| \leq \eta$ en waarbij $\circ$ staat voor een van de elementaire rekenkundige operaties $+, -, *, /$.
- **Meerdere afrondfouten**: Gegeven $|\epsilon_i| \leq \eta$ en $n\eta < 1$, dan $\prod_{i=1}^n (1+\epsilon_i) = (1+\theta_n)$ met $|\theta_n| \leq \frac{n\eta}{1-n\eta}$.
- **Gedeelde differenties** (met $x_0 \leq x_1 \leq \ldots \leq x_n$)

$$f[x_i] = f(x_i), \quad f[x_i, x_j] = \frac{f[x_j] - f[x_i]}{x_j - x_i}, \quad f[x_i, x_j, x_k] = \frac{f[x_j, x_k] - f[x_i, x_j]}{(x_k - x_i)}.$$

$$f[x_0, \ldots, x_n] = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}, \, \xi \in [x_0, x_n].$$

- **Interpolatie** Gegeven een functie f en steunpunten $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$ zijn het interpolerende polynoom p_n en de bijbehorende foutterm e_n gegeven door:

$$p_n(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + \ldots + f[x_0, x_1, \ldots x_n] \prod_{i=0}^{n-1} (x - x_i),$$

$$e_n(x) = f(x) - p_n(x) = f[x_0, x_1, \ldots, x_n, x] \prod_{i=0}^{n} (x - x_i).$$

- **Middelwaardestelling**: Gegeven continue functies f en w waarbij w niet van teken wisselt op het interval $[a, b]$, dan is er een $\xi \in [a, b]$ waarvoor:

$$\int_a^b f(x) w(x) \, \mathrm{d}x = f(\xi) \int_a^b w(x) \, \mathrm{d}x.$$

- **Vastepuntstelling**: De iteratie

$$x_{k+1} = g(x_k),$$

met $x_0 \in [a, b]$ convergeert linear naar een vast punt $x_* \in [a, b]$ als $|g'(x)| < 1$ op $[a, b]$. Als bovendien $g'(x_*) = 0$, dan convergeert de iteratie kwadratisch.
- **Vastepuntiteratie voor lineare stelsels**: De iteratie

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + M(\mathbf{b} - A\mathbf{x}_k),$$

convergeert als de spectrale radius van $I - MA$ kleiner dan 1 is, oftewel $\rho(I - MA) < 1$.

2 pt. **vraag 1 - Afrondfouten** In deze opgave bekijken we de afrondfout in de berekening $y = \frac{1}{3} + \frac{1}{x}$. Je mag aannemen dat x een zwevendekommagetal is.

a) Laat zien dat de *relatieve fout* kan worden begrensd door

$$\frac{|\mathrm{fl}(y) - y|}{|y|} \leq \frac{2\eta}{1 - 2\eta} \frac{3 + |x|}{|3 + x|},$$

waarbij η de afrondeenheid is.

b) Voor welke waarde(n) van x is deze berekening problematisch?

3 pt. **vraag 2 - Vastepuntiteratie** We gebruiken de volgende vastepuntiteratie:

$$x_{k+1} = x_k - 2\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

om de nulpunten te vinden van de functie

$$f(x) = (x - 1)^2(x + 1).$$

a) Convergeert de iteratie naar het nulpunt $x_* = 1$ wanneer $x_0 = 1 + \delta$ met $|\delta|$ klein genoeg ? Zoja, hoe snel (lineair of kwadratisch)? Beargumenteer ook duidelijk waarom.

b) Convergeert de iteratie naar het nulpunt $x_* = -1$ wanneer $x_0 = -1 + \delta$ met $|\delta|$ klein genoeg ? Zoja, hoe snel (lineair of kwadratisch)? Beargumenteer ook duidelijk waarom.

3 pt. **vraag 3 - Interpolatie en differentiatie** We gebruiken de volgende benadering van de afgeleide

$$f'(x_0) \approx p_2'(x_0) = \frac{-f(x_0 + 2h) + 4f(x_0 + h) - 3f(x_0)}{2h}.$$

a) Stel het interpoleren polynoom p_2 met steunpunten $\{x_0, x_0 + h, x_0 + 2h\}$ op en laat zien dat dit tot de gegeven benadering van de afgeleide van f op x_0 leidt.

b) Laat zien dat de fout is gegeven door

$$f'(x_0) - p_2'(x_0) = \tfrac{1}{3}h^2 f'''(\xi),$$

met $\xi \in [x_0, x_0 + 2h]$.

c) Gegeven $f(x) = \sin(x)$ en een $\epsilon > 0$, bepaal h zodat $|f'(x_0) - p_2'(x_0)| \leq \epsilon$ voor alle $x_0 \in [0, 2\pi]$.

3 pt. **vraag 4 - Differentiaalvergelijkingen** We bekijken de volgende methode om een differentiaalvergelijking $u'(t) = f(u(t))$ op te lossen

$$\widetilde{u}_{n+1} = \widetilde{u}_n + 2hf(\widetilde{u}_n) - hf\big(\widetilde{u}_n - \tfrac{h}{2}f(\widetilde{u}_n)\big).$$

waarbij $\widetilde{u}_n$ een benadering is van $u(n \cdot h)$.

a) Laat zien dat de methode een truncatiefout van orde h^3 heeft.

b) Bepaal het stabiliteitsgebied van de methode.