Ringen en Galoistheorie, 7 april 2020, 17:00 – 20:00

Schrijf op elk vel je naam en studentnummer.
Laat bij elke opgave zien hoe je aan je antwoord komt!
Ook als je een onderdeel niet kunt maken, kun je het gevraagde resultaat wel gebruiken voor de daaropvolgende onderdelen.
In totaal zijn er 100 punten te behalen. Je mag gebruik maken van het dictaat, eigen aantekeningen en uitwerkingen van opgaven en oude tentamens.
Veel succes!

1. (a) (**5 pt**) Ontbind $X^8 - X^4 - 6$ in irreducibele factoren in $\mathbb{Z}[X]$.
   (b) (**5 pt**) Bepaal of het ideaal (X^3+2X-1, X^3+2X+2) in $\mathbb{Z}[X]$ een priemideaal is en of het een maximaal ideaal is.
   (c) (**5 pt**) Bepaal of het ideaal $(X^2+4XY+5Y^2)$ in $\mathbb{Q}[X,Y]$ een priemideaal is en of het een maximaal ideaal is.

2. Laat R een commutatieve ring met 1 zijn. Ter herinnering: een element $a \in R$ is **nilpotent** als $a \neq 0$ en er een positief geheel getal n bestaat met $a^n = 0$. Een element $b \in R$ is **idempotent** als $b \neq 0, 1$ en $b^2 = b$.
   (a) (**5 pt**) Bewijs: R bevat een nilpotent element $\iff$ $R[X]$ bevat een nilpotent element.
   (b) (**5 pt**) Bewijs: $R[X]$ bevat een idempotent element van graad 1 $\implies$ R bevat een nilpotent element èn een idempotent element.
   (c) (**5 pt**) Bewijs dat $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ zowel een nilpotent element als een idempotent element bevat.
   (d) (**5 pt**) Bewijs dat $(\mathbb{Z}/12\mathbb{Z})[X]$ geen idempotent element van graad 1 bevat. (De omkering van (b) geldt dus niet.)

3. Laat $f = X^2 + 2 \in \mathbb{F}_5[X]$ en laat α een wortel van dit irreducibele polynoom zijn. Laat $K = \mathbb{F}_5(\alpha)$; dit is een eindig lichaam.
   (a) (**2 pt**) Hoeveel elementen heeft K?
   (b) (**4 pt**) Schrijf G voor de multiplicatieve groep $K^* = K - \{0\}$ van K. Bewijs dat α orde 8 heeft in G (dus in het bijzonder dat $\alpha^4 \neq 1$).
   (c) (**4 pt**) Bewijs dat $\alpha + 2$ orde 3 heeft in G.
   (d) (**5 pt**) Bewijs dat G cyclisch is en bepaal een voortbrenger van G.
   (e) (**5 pt**) Bepaal een monisch irreducibel polynoom g van graad 2 in $\mathbb{F}_5[X]$ zo dat het beeld van X in $\mathbb{F}_5[X]/(g)$ een voortbrenger is van de multiplicatieve groep van dat lichaam.

Z.O.Z. voor opgaven 4 en 5

4. Zij $f = X^3 - 3X + 1$.

   (a) (**4 pt**) Bewijs dat f irreducibel is in $\mathbb{Q}[X]$.

   (b) (**4 pt**) Laat α een wortel zijn van f en laat $K = \mathbb{Q}(\alpha)$. Bewijs dat f in $K[X]$ deelbaar is door $X - \alpha$, met quotiënt $g = X^2 + \alpha X + (\alpha^2 - 3)$.

   (c) (**4 pt**) Bewijs dat $\alpha^2 - 2$ een wortel is van g.

   (d) (**4 pt**) Bewijs dat K een Galois-uitbreiding is van $\mathbb{Q}$.

   (e) (**4 pt**) Bewijs dat er een uniek automorfisme σ van K bestaat met $\sigma(\alpha) = \alpha^2 - 2$. Bepaal de orde van σ.

5. Zij $f = X^5 - 2 \in \mathbb{Q}[X]$ en laat α de reële wortel van f zijn. Laat ζ een primitieve vijfdemachts eenheidswortel zijn ($\zeta^5 = 1$, $\zeta \neq 1$).

   (a) (**4 pt**) Bewijs dat $L = \mathbb{Q}(\alpha, \zeta)$ het splijtlichaam is van f over $\mathbb{Q}$.

   (b) (**4 pt**) Bewijs dat $[L : \mathbb{Q}] = 20$.

   (c) (**4 pt**) Laat $G = \mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})$. Bewijs dat er elementen σ en τ van G bestaan zo dat

   $$\sigma(\alpha) = \alpha\zeta, \qquad \sigma(\zeta) = \zeta\,; \qquad \tau(\alpha) = \alpha, \qquad \tau(\zeta) = \zeta^2.$$

   (d) (**3 pt**) Bepaal de ordes van σ en τ en bewijs dat $G = \langle \sigma, \tau \rangle$.

   (e) (**5 pt**) Vind twee tussenlichamen M van $L/\mathbb{Q}$ die Galois zijn over $\mathbb{Q}$ en waarvoor geldt $\mathbb{Q} \neq M \neq L$. Bepaal primitieve elementen voor die twee tussenlichamen (d.w.z., die zo'n tussenlichaam voortbrengen over $\mathbb{Q}$).

   (f) (**5 pt**) Bewijs dat er precies twee tussenlichamen M van $L/\mathbb{Q}$ bestaan die Galois zijn over $\mathbb{Q}$ en waarvoor geldt $\mathbb{Q} \neq M \neq L$.

BELANGRIJK: Vergeet niet de ondertekende verklaring op pagina 3 mee te sturen met je uitwerkingen van het tentamen.

Zie pagina 3 voor de verklaring die je moet invullen en ondertekenen en meesturen met je uitwerkingen.

BELANGRIJK: Onderteken de volgende verklaring en retourneer die samen met je uitwerkingen van het tentamen, in één pdf-bestand:

Hierbij verklaar ik dat ik de uitwerkingen van dit tentamen zelf heb gemaakt, zonder hulp van andere personen of van andere hulpmiddelen dan het dictaat, eigen aantekeningen en uitwerkingen van opgaven en oude tentamens.

Naam (in blokletters):

Studentnummer:

Datum:

Handtekening: