Tentamen groepentheorie 7-11-2019. Je mag resultaten uit het boek en de hoorcolleges vrij gebruiken, zolang je ernaar verwijst en tenzij je gevraagd wordt ze opnieuw te bewijzen. Opgaven uit de werkcolleges moet je wel opnieuw bewijzen. Je mag voorgaande onderdelen van een opgave gebruiken zonder ze bewezen te hebben.

Opgave 1.

(a) **1 punt** Hoeveel conjugatieklassen heeft S_5? Bewijs je antwoord.

(b) **1 punt** Gegeven: de dicyclische groep Dic_3 heeft orde 12 en wordt voortgebracht door twee elementen r, s die voldoen aan $r^6 = 1$, $s^2 = r^3$ en $s^{-1}rs = r^{-1}$. Bewijs: er bestaat een normale ondergroep $H \lhd \mathrm{Dic}_3$ zodanig dat $\mathrm{Dic}_3/H \cong \mathbb{Z}_2$.

(c) **1 punt** Zij G een abelse groep en H de deelverzameling van alle elementen in G met eindige orde. Bewijs dat H een ondergroep van G is.

Opgave 2.

(a) **1 punt** Bewijs dat D_3 isomorf is met een ondergroep $H \leq S_6$ zodanig dat H voorgebracht wordt door een even en een oneven permutatie. *Hint: Cayley.*

(b) **1 punt** Geef de definitie van een baan en stabilisator, en formuleer de baan-stabilisatorstelling.

(c) **1 punt** Beschouw een regelmatige zeshoek in $\mathbb{R}^2$. Stel we hebben n kleuren tot onze beschikking en we decoreren de zeshoek door elk van de zes kanten (d.w.z. zijden) een kleur te geven. Beschouw twee zulke gedecoreerde zeshoeken als equivalent wanneer ze op *draaiing of spiegeling* in $\mathbb{R}^2$ na hetzelfde zijn. Bewijs dat er, op symmetrie na, $\frac{1}{12}(n^6+3n^4+4n^3+2n^2+2n)$ zulke gedecoreerde zeshoeken zijn.

Opgave 3.

(a) **1 punt** Beschouw $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ als groepen onder vermenigvuldiging. Zijn deze groepen isomorf? Bewijs je antwoord.

(b) **1 punt** Bewijs dat er geen enkelvoudige groep van orde 351 bestaat.

(c) **1 punt** Zij G een groep. Een *automorfisme* van G is een groepsisomorfisme $\phi : G \to G$. De verzameling $\mathrm{Aut}(G)$ van automorfismen van G vormt een groep onder samenstelling (gegeven). Stel $g \in G$, dan is $G \to G$, $x \mapsto gxg^{-1}$ een automorfisme van G (gegeven) en zulke automorfismen van G heten *inwendige automorfismen* van G. Bewijs dat de verzameling $\mathrm{Inn}(G)$ van inwendige automorfismen van G een normale ondergroep van $\mathrm{Aut}(G)$ is. Bewijs voorts dat $G/Z(G) \cong \mathrm{Inn}(G)$, waar $Z(G)$ het centrum van G is.

Opgave 4. 1 punt De quasi-diëdergroep van orde 16 is een groep G met twee voortbrengers r, s die voldoen aan de relaties $r^8 = s^2 = 1$ en $rs = sr^3$; i.h.b. heeft r orde 8 en s orde 2 (gegeven). Bewijs dat $\langle r^4 \rangle \lhd G$ en $G/\langle r^4 \rangle \cong D_4$. *Hint: De quaternionengroep heeft slechts 1 element van orde 2.*

Woordenboek. Dicyclische groep=dicyclic group, ondergroep=subgroup, voortgebracht=generated, baan=orbit, enkelvoudig=simple, centrum=centre.

Opgave 1. (a) De conjugatieklassen van S_5 staan in bijectief verband met de partities van 5. Dit zijn $5 = 5$, $5 = 4+1$, $5 = 3+2$, $5 = 3+1+1$, $5 = 2+2+1$, $5 = 2+1+1+1$, $5 = 1+1+1+1+1$. Antwoord: 7. (b) Beschouw $\langle r\rangle \leq \mathrm{Dic}_3$. Dan $\langle r\rangle = \{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5\}$ (relaties en orde 12; geen aftrek als $\mathrm{ord}(r) = 6$ niet bewezen wordt) en de index van $\langle r\rangle$ in Dic_3 is dus 2. Vanwege een stelling uit het boek $\langle r\rangle \lhd \mathrm{Dic}_3$ en $\mathrm{Dic}_3/\langle r\rangle \cong \mathbb{Z}_2$. (c) De eenheid heeft orde 1 dus $1 \in H$. Als $x, y \in G$ eindige orde m, n hebben, dan $(xy)^{mn} = x^{mn}y^{mn}$ (G abels) en dus $(xy)^{mn} = 1$ en xy heeft eindige orde. Voorts $(x^{-1})^m = (x^m)^{-1} = 1$, dus x^{-1} heeft eindige orde.

Opgave 2. (a) Vanwege de stelling van Cayley: $D_3 \cong H := \{L_1, L_r, L_{r^2}, L_s, L_{rs}, L_{r^2s}\} \leq S_6$, waar $L_g : D_3 \to D_3$ gegeven wordt door linksvermenigvuldigen met x. Label $1 = 1, 2 = r, 3 = r^2, 4 = s, 5 = rs, 6 = r^2s$. De standaardrekenregels voor diëdergroepen geven $L_r = (123)(456)$ (een even permutatie) en $L_s = (14)(26)(35)$ (een oneven permutatie). Omdat r, s D_3 voortbrengen, concluderen we dat H voortgebracht wordt door een even en oneven permutatie. Alternatief: neem $H = \langle (12), (123)\rangle \leq S_6$. Dan wordt H voortgebracht door een even en oneven permutatie en $H \cong S_3$ (evident). Vanwege de classificatie van groepen van orde 6 weten we $S_3 \cong D_3$ (S_3 is niet cyclisch). (b) Stel $\sigma : G \times X \to X$ is een groepsactie. Dan $O(x) = \{g(x) : g \in G\}$ heet de baan van x en $G_x := \{g \in G : g(x) = x\}$ heet de stabilisator van x. De afbeelding $g(x) \mapsto gG_x$ geeft een bijectie tussen de elementen van $O(x)$ en de linkernevenklassen van G_x in G. (Geen aftrek als G eindig wordt genomen en $|O(x)| = |G|/|G_x|$ voor de baan-stabilisatorstelling wordt opgeschreven.) (c) De symmetrieën van de ongedecoreerde zeshoek zijn D_4. Zij X de verzameling van alle n^6 gedecoreerde zeshoeken dan hebben we een groepsactie van D_4 op X en het gevraagde antwoord wordt gegeven door de telstelling: $|X^e| = n^6$, $|X^r| = |X^{r^{-1}}| = |X^{r^5}| = n$, $|X^{r^2}| = |X^{r^{-2}}| = |X^{r^4}| = n^2$, $|X^{r^3}| = n^3$. Voor een spiegeling a in de lijn door twee tegenoverliggende hoekpunten geldt: $|X^a| = n^3$ (er zijn 3 zulke spiegelingen). Voor een spiegeling b in de lijn door het midden van twee tegenoverliggende kanten geldt $|X^b| = n^4$ (er zijn drie zulke spiegelingen). Het antwoord volgt.

Opgave 3. (a) De vergelijking $x^3 = 1$ heeft 1 oplossing in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ en 3 oplossingen in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ dus deze groepen zijn niet isomorf. (b) Zij G een enkelvoudige groep van orde $351 = 3^3 \cdot 13$. Het aantal 13-Sylows ligt in $\{1, 14, 27, ...\}$ en deelt 27 en is dus 27 (1 uitgesloten want G is enkelvoudig). Het aantal 3-Sylows ligt in $\{1, 4, 7, 10, 13, ...\}$ en deelt 13 en is dus 13 (1 is uitgesloten want G is enkelvoudig). Zij $P_1, \ldots, P_{27}$ de verschillende 13-Sylows dan $P_i \cap P_j = \{1\}$ voor alle $i \neq j$ want iedere $P_i \cong \mathbb{Z}_{13}$, dus ieder niet-triviaal element van P_i brengt P_i voort. Dus $\bigcup_i P_i$ bevat $27 \cdot 12 = 324$ niet-triviale elementen. Er is nog ruimte voor één 3-Sylow (met 27 elementen). Tegenspraak. (c) Definieer $\phi : G \to \mathrm{Aut}(G)$, $\phi(g) : G \to G, \phi(g)(x) = gxg^{-1}$. Dan $\phi(gh)(x) = ghx(gh)^{-1} = g(hxh^{-1})g^{-1} = \phi(g)(\phi(h)(x))$ voor alle $g, h \in G$ en $x \in G$, dus $\phi(gh) = \phi(g) \circ \phi(h)$. Voorts $\ker(\phi) = \{g \in G : gxg^{-1} = x\ \forall x \in G\} = Z(G) \lhd G$ en $G/Z(G) \cong \mathrm{im}(\phi) = \mathrm{Inn}(G) \leq \mathrm{Aut}(G)$ (1ste isomorfiestelling). Stel $\psi \in \mathrm{Aut}(G)$ en $g \in G$. Schrijf $g = \psi^{-1}(h)$. Dan $(\psi \circ \phi(g) \circ \psi^{-1})(x) = \psi(g\psi^{-1}(x)g^{-1}) = \psi(\psi^{-1}(h)\psi^{-1}(x)\psi^{-1}(h^{-1})) = \psi(\psi^{-1}(hxh^{-1})) = hxh^{-1}$ voor alle $x \in G$ (ψ^{-1} is een groepsisomorfisme), dus $\psi \circ \phi(g) \circ \psi^{-1} \in \mathrm{Inn}(G)$ en $\mathrm{Inn}(G) \lhd \mathrm{Aut}(G)$.

Opgave 4. Merk op $rr^4r^{-1} = r^{12} = r^4$ en $sr^4s^{-1} = sr^4s = s^2r^{12} = r^4$ dus $H := \langle r^4\rangle \lhd G$. Merk ook op $(rH)(sH) \neq (sH)(rH)$ want anders $(sr)^{-1}(rs) = r^7srs = r^{10} = r^2 \in H = \{1, r^4\}$ (tegenspraak: r heeft orde 8). Dus G/H is een niet-abelse groep van orde 8 en dus isomorf met D_4 of Q (classificatie). Voorts $(r^2H)(r^2H) = r^4H = H$ en $(sH)(sH) = H$ zijn twee elementen van orde 2 dus $G/H \cong D_4$ want Q heeft maar 1 element van orde 2.