Hertentamen groepentheorie 8-1-2020. Je mag resultaten uit het boek en de hoorcolleges vrij gebruiken, zolang je ernaar verwijst en tenzij je gevraagd wordt ze opnieuw te bewijzen. Opgaven uit de werkcolleges moet je wel opnieuw bewijzen. Je mag voorgaande onderdelen van een opgave gebruiken zonder ze bewezen te hebben.

Opgave 1.

(a) **1 punt** Schrijf $\sigma = (2345)$ als product van transposities van de vorm $(1a)$. Wat is de orde van σ en wat is het teken van σ?

(b) **1 punt** Zijn de volgende uitspraken waar of onwaar? In het geval "waar", bewijs je antwoord en in het geval "onwaar", geef een tegenvoorbeeld. (i) Zij $H_1, H_2 \leq G$ ondergroepen, dan is $H_1 \cup H_2$ een ondergroep van G. (ii) Zij $H_1, H_2 \leq G$ ondergroepen, dan is $H_1 \cap H_2$ een ondergroep van G.

(c) **1 punt** Bewijs dat er geen enkelvoudige groep van orde 1155 bestaat.

Opgave 2.

(a) **1 punt** Formuleer de stelling van Cayley. Je hoeft geen bewijs te geven.

(b) **1 punt** Beschouw een tetraëder. Stel we hebben twee kleuren tot onze beschikking en we decoreren de tetraëder door een gekleurde stip te zetten op elk van de vier hoekpunten en het midden van elk van de zes ribben. Dit geeft aanleiding tot 2^{10} gedecoreerde tetraëders. We beschouwen twee gedecoreerde tetraëders als equivalent wanneer ze door draaiing op elkaar kunnen worden afgebeeld. Bewijs dat er, op symmetrie na, 112 verschillende gedecoreerde tetraëders zijn.

(c) **1 punt** Gegeven een groepsactie $\sigma : G \times X \to X$. Stel voor alle $x, y \in X$ bestaat er een $g \in G$ zodanig dat $\sigma(g, x) = y$. Stel alle stabilizatoren van deze groepsactie zijn triviaal, d.w.z. gelijk aan $\{e\}$. Neem $x_0 \in X$. Bewijs dat de afbeelding $G \to X$, $g \mapsto \sigma(g, x_0)$ een bijectie is.

Opgave 3.

(a) **1 punt** Bewijs dat de kern van een groepshomomorfisme een normale ondergroep is. Dit is onderdeel van de eerste isomorfiestelling.

(b) **1 punt** Stel p, q zijn twee veschillende priemgetallen. Beschouw de afbeelding $\phi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/\langle p\rangle \times \mathbb{Z}/\langle q\rangle$, $\phi(x) = (x\langle p\rangle, x\langle q\rangle)$, waar $\langle p\rangle = \{pk : k \in \mathbb{Z}\} \leq \mathbb{Z}$. Gebruik deze afbeelding om te bewijzen dat $\mathbb{Z}/\langle pq\rangle \cong \mathbb{Z}/\langle p\rangle \times \mathbb{Z}/\langle q\rangle$.

(c) **1 punt** Zij G een groep. Bewijs dat de volgende uitspraken equivalent zijn. (i) G is enkelvoudig. (ii) Voor elk groepshomorfisme $\phi : G \to H$ geldt dat ϕ injectief is of dat de kern van ϕ gelijk is aan G.

Opgave 4. 1 punt Zij p een priemdeler van de orde van een eindige groep G. Stel N is een normale ondergroep van G en $|N| = p^n$ voor een $n \geq 0$. Bewijs dat N een normale ondergroep is van iedere p-Sylow ondergroep van G. *Hint: Zij H een p-Sylow ondergroep van G. Volgens de tweede isomorfiestelling geldt: $HN \leq G$, $N \lhd HN$, $H \cap N \lhd H$ en $HN/N \cong H/H \cap N$, waar $HN := \{xy : x \in H \,\text{en}\, y \in N\}$.*

Woordenboek. Teken=sign, ondergroep=subgroup, enkelvoudig=simple, kern=kernel.

Opgave 1. (a) De orde van σ is 4 (bewijs niet nodig). Gebruik $(a_1a_2\cdots a_k) = (a_1a_k)\cdots(a_1a_3)(a_1a_2)$, dan $(2345) = (25)(24)(23)$. Derhalve σ is oneven. Gebruik $(ab) = (1a)(1b)(1a)$ om te zien dat $\sigma = (12)(15)(12)(12)(14)(12)(12)(13)(12)$. (b) Uitspraak (i) is onwaar: neem $H_1 = \langle 2\rangle \leq \mathbb{Z}$ en $H_2 = \langle 3\rangle \leq \mathbb{Z}$. Dan $2+3 = 5 \notin H_1 \cup H_2$, want 5 is niet deelbaar door 2 of 3. Dus $H_1 \cup H_2$ is geen ondergroep. Uitspraak (ii) is waar. Als $x, y \in H_1 \cap H_2$ dan $x, y \in H_1$ en $x, y \in H_2$. Dus $xy \in H_1$ en $xy \in H_2$ en $x^{-1} \in H_1$ en $x^{-1} \in H_2$, want H_1, H_2 zijn ondergroepen. Dus $xy \in H_1 \cap H_2$ en $x^{-1} \in H_1 \cap H_2$. Voorts $1 \in H_1$ en $1 \in H_2$ dus $1 \in H_1 \cap H_2$. (c) Stel G is een enkelvoudige groep van orde $1155 = 11\cdot 105 = 11\cdot 7\cdot 5\cdot 3$. Het aantal 11-Sylows is een deler van 105 en dus een element van $\{1, 3, 5, 7, 15, 21, 35, 105\}$. Modulo 11 zijn deze getallen gelijk aan $1, 3, 5, 7, 4, 10, 2, 6$, dus G heeft een unieke 11-Sylow H (Sylow III). Deze is automatisch normaal want gHg^{-1} is ook een 11-Sylow voor alle $g \in G$. Tegenspraak.

Opgave 2. (a) Zij G een groep, dan is G isomorf met een ondergroep van S_G. (b) Zij G de groep draaiingssymetrieën van de tetraëder met voor de hand liggende actie op de verzameling X van gedecoreerde tetraëders. Gebruik de telstelling. Ten eerste $|X^e| = 2^{10}$. Ten tweede, $|X^r| = 2^4$ (notatie voor r als in boek) en $|X^{r^2}| = 2^4$. Ten derde $|X^s| = 2^6$. Deze tellingen moeten gepaard gaan met duidelijke plaatjes! Er zijn vier symmetrieën van type r, vier van type r^2 en drie van type s. De telstelling geeft $\frac{1}{12}(2^{10} + 8\cdot 2^4 + 3\cdot 2^6) = 112$. (c) Surjectiviteit: stel $y \in X$, dan is er een $g \in G$ zodanig dat $\sigma(g, x_0) = y$. Injectiviteit: stel $\sigma(g, x_0) = \sigma(h, x_0)$, dan $g^{-1}h \in G_{x_0} = \{e\}$, dus $g = h$.

Opgave 3. (a) Zij $\phi : G \to H$ een groepshomomorfisme. Ten eerste, als $x, y \in \ker\phi$, dan $\phi(xy) = \phi(x)\phi(y) = e^2 = e$, $\phi(x^{-1}) = \phi(x)^{-1} = e^{-1} = e$ en $\phi(e) = e$, dus $xy, x^{-1}, e \in \ker\phi$. Derhalve $\ker\phi \leq G$. Stel $x \in \ker\phi$ en $g \in G$. Dan $\phi(gxg^{-1}) = \phi(g)\phi(x)\phi(g)^{-1} = \phi(g)\phi(g)^{-1} = e$. Derhalve $gxg^{-1} \in \ker\phi$, dus $\ker\phi \lhd G$. (b) De afbeelding ϕ is een groepshomomorphisme want $(m+n)\langle p\rangle = m\langle p\rangle + n\langle p\rangle$ voor alle $m, n \in \mathbb{Z}$ (en evenzo voor q). Voorts $\ker\phi = \{m \in \mathbb{Z} : p \mid m \,\text{en}\, q \mid m\} = \{m \in \mathbb{Z} : pq \mid m\} = \langle pq\rangle$. De tweede gelijkheid volgt omdat p, q copriem zijn. Dus $\mathbb{Z}/\langle pq\rangle \cong \operatorname{im}\phi$ (eerste isomorfiestelling). Merk voorts op dat $|\mathbb{Z}/\langle pq\rangle| = pq = |\mathbb{Z}/\langle p\rangle|\cdot|\mathbb{Z}/\langle q\rangle|$. Dus ϕ is ook surjectief. (c) Stel (i) geldt en $\phi : G \to H$ is een groepshomomorfisme. Omdat $\ker\phi$ normaal is, volgt dat $\ker\phi = \{e\}$ of $\ker\phi = G$. In het eerste geval is ϕ injectief (boek/colleges). Stel (ii) geldt en $H \lhd G$. Beschouw de afbeelding $\phi : G \to G/H$ dan $\ker\phi = H$. Dus $H = \{e\}$ (als ϕ injectief is) of $H = G$ (als $\ker\phi = G$). Dus G is normaal.

Opgave 4. Stel $|G| = p^m k$ met $m > 0$ en $p \nmid k$. Zij H een p-Sylow. Dan $|H| = p^m$ en $|N| = p^n$ met $0 \leq n \leq m$ (Lagrange). Het volstaat om te laten zien dat $|H \cap N| = p^n$, want dan $N = H \cap N \lhd H$ (hint). Ten eerste $|H \cap N| \mid |H| = p^m$ (Lagrange). Ten tweede $H/H\cap N \cong HN/N \leq G/N$ (hint), dus $|H/H\cap N| \mid |G/N| = p^{m-n}k$ (Lagrange). Derhalve $|H/H\cap N| \leq p^{m-n}$, wat alleen kan als $|H \cap N| = p^n$.