Uitwerking tentamen Functies en Reeksen

4 november 2019, 13:30 - 16:30 uur

Opgave 1

(a) Omdat de partiële afgeleiden bestaan en continu zijn is f totaal differentieerbaar. We beschouwen de functie $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ gedefinieerd door $c(t) = (t, t)$. Dan is c differentieerbaar met afgeleide $c'(t) = (1, 1)$ voor alle $t \in \mathbb{R}$. Wegens de kettingregel is de samenstelling $f \circ c$ derhalve differentieerbaar $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^p$ met afgeleide

$$\frac{d}{dt} f(c(t)) = Df(c(t))c'(t) = Df(c(t)) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Hieruit volgt het gewenste resultaat.

(b) Uit (a) volgt met gebruiken van de Jacobimatrix dat

$$\frac{d}{dt} f(t,t)|_{t=t_0} = D_1 f(t_0, t_0) \cdot 1 + D_2 f(t_0, t_0) \cdot 1 = D_1 f(t_0, t_0) + D_2 f(t_0, t_0)$$

Wegens de definitie van partieel differentiëren is

$$D_1 f(t_0, t_0) = \left.\frac{d}{dt} f(t, t_0)\right|_{t=t_0}, \qquad D_2 f(t_0, t_0) = \left.\frac{d}{dt} f(t_0, t)\right|_{t=t_0}$$

Hieruit volgt het gestelde.

Opgave 2

(a) Allereerst merken we op dat de integrand f een continue functie van $(x, y) \in [0, \infty[\times \mathbb{R}$ is en dat voor alle $y \in \mathbb{R}^n$ geldt

$$|f(x, y)| \leq e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

terwijl de functie in het rechterlid oneigenlijk Riemann integreerbaar over $[0, \infty[$ is. Hieruit volgt dat $f(\,\cdot\,, y)$ oneigenlijk integreerbaar is voor alle $y \in \mathbb{R}$ en dat door F een continue functie $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ wordt gedefinieerd.

We merken op dat f partieel differentieerbaar is naar de tweede variabele, met continue partiële afgeleide $D_2 f : (x, y) \mapsto -x \sin(xy) e^{-\frac{1}{2}x^2}$ die voldoet aan de schatting

$$|D_2 f(x, y)| \leq x e^{-\frac{1}{2}x^2},$$

voor alle $y \in \mathbb{R}$ en $x \geq 0$. Der functie $x \mapsto x e^{-\frac{1}{2}x^2}$ is oneigenlijk integreerbaar over $[0, \infty[$, dus F is continu differentieerbaar met afgeleide

$$F'(y) = \int_0^\infty D_2 f(x, y)\, dx.$$

(b) Voor $R > 0$ volgt met partiële integratie dat

$$\begin{aligned}
-\int_0^R x\sin(yx)e^{-\frac{1}{2}x^2}\,dx &= \int_0^R \sin(yx)\frac{d}{dx}(e^{-\frac{1}{2}x^2})\,dx \\
&= \sin(yR)e^{-\frac{1}{2}R^2} - y\int_0^R \cos(xy)e^{-\frac{1}{2}x^2}\,dx.
\end{aligned}$$

Uit het in (a) bewezene volgt dat we de limiet voor $R \to \infty$ kunnen nemen, zodat

$$F'(y) = 0 - yF(y) = -yF(y).$$

Opgave 3

(a) Als $x \geq 0$ en $n > x$ dan geldt

$$f_n(x) = n\log(1+\frac{x}{n}) = n\left(\frac{x}{n} + R(\frac{x}{n})\right) = x + nR(\frac{x}{n})$$

waarbij

$$|nR(\frac{x}{n})| \leq \frac{|x|^2}{n}.$$

Hieruit volgt met de insluitstelling dat voor elke $x \in [0,\infty[$ geldt dat $\lim_{n\to\infty} nR(x/n) = 0$. Dus $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = x$.

(b) Voor alle $x \in [0,a]$ en alle $n > a$ geldt

$$|f_n(x) - f(x)| = n|R(x/n)| \leq |x|^2/n \leq a^2/n$$

dus

$$\|f_n - f\|_{[0,a]} \leq a^2/n.$$

Hieruit volgt met de insluitstelling dat $\|f_n - f\|_{[0,a]} \to 0$ voor $n \to \infty$. Dus $f_n \to f$ uniform op $[0,a]$.

(c) Tenslotte bewijzen we dat de convergentie niet uniform is op $\mathbb{R}$. Stel dat dit wel het geval zou zijn, dan $\|f_n - f\|_{[0,\infty[} \to 0$. Voor $n \geq 1$ kiezen we $x_n = n$. Dan is $f_n(x_n) - f(x_n) = n|R(1)| \geq |R(1)|$, dus $\|f_n - f\|_{[0,\infty]} \geq |R(1)|$. Aangezien $R(1) = \log 2 - 1 > 0$ levert dit een tegenspraak op met de uniforme convergentie.

Opgave 4

(a) Voor $|z| \leq \sqrt{2}$ en $k \geq 1$ geldt

$$\left|\frac{(-1)^k z^{2k}}{2^{k+1}(2k+1)^2}\right| = \frac{|z|^{2k}}{2^{k+1}(2k+1)^2} \leq \frac{2^k}{2^{k+1}(2k+1)^2} = \frac{1}{2(2k+1)^2} \leq \frac{1}{k^2}.$$

De reeks $\sum_{k\geq 1}\frac{1}{k^2}$ is convergent, dus met het majorantiekenmerk volgt dat de gegeven machtreeks absoluut uniform convergeert op $\bar{D}$. De termen van de machtreeks zijn continu op $\bar{D}$ dus wegens een stelling is de som van de reeks dat ook.

(b) Voor $z = i\sqrt{2t}$, $t > 1$ geldt

$$\frac{(-1)^k z^{2k}}{2^{k+1}(2k+1)^2} = \frac{t^k}{2(2k+1)^2}$$

Omdat $2(2(k+1)+1)^2/2(2k+1)^2 \to 1$ voor $k \to \infty$ heeft de machtreeks

$$\sum_{k \geq 1} \frac{t^k}{2(2k+1)^2}$$

convergentiestraal 1 dus hij divergeert voor $t > 1$. Derhalve divergeert de oorspronkelijke machtreeks voor $z = i\sqrt{2t}$.

(c) Zij R de convergentiestraal. Uit (a) volgt dat $\bar{D}(0; \sqrt{2}) \subset \bar{D}(0; R)$, dus $R \geq \sqrt{2}$. Uit (b) volgt dat $i\sqrt{2t} \notin \bar{D}(0; R)$ dus $R \leq \sqrt{2t}$ voor alle $t > 1$. Dus $R \leq \sqrt{2}$ en we concluderen dat $R = \sqrt{2}$.

Opgave 5

(a) De functie f is continu en stuksgewijs C^1, dus de Fourierreeks is absoluut uniform convergent, volgens een stelling uit het dictaat.

(b) De Fourier coëfficiënten $c_k = \mathcal{F}(f)_k$ worden gegeven door

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx}\, dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\frac{\pi}{2} - |x|) e^{-ikx}\, dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (\frac{\pi}{2} - x) \cos(kx)\, dx$$

In het bijzonder volgt hieruit dat $c_0 = 0$. Voor $k \neq 0$ vinden we, met partiële integratie, dat

$$c_k = \frac{1}{k\pi} (\frac{\pi}{2} - x) \sin(kx) \Big|_0^{\pi} + \frac{1}{k\pi} \int_0^{\pi} \sin(kx)\, dx = -\frac{1}{k^2\pi} (\cos kx) \Big|_0^{\pi}.$$

Voor even k volgt hieruit dat $c_k = 0$. Daarnaast vinden we voor $l \in \mathbb{Z}$ dat

$$c_{2l+1} = \frac{2}{(2l+1)^2\pi}$$

(c) We merken op dat

$$\langle f, f \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{\pi}{2} - |x|\right)^2 dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \left(\frac{\pi}{2} - x\right)^2 dx = -\frac{1}{3}\frac{1}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} - x\right)^3 \Big|_0^{\pi} = \frac{\pi^2}{12}.$$

Met de stelling van Parseval volgt nu dat

$$\frac{\pi^2}{12} = \sum_{l \in \mathbb{Z}} |c_{2l+1}|^2 = 2 \sum_{l=0}^{\infty} \frac{4}{(2l+1)^4 \pi^2}$$

Door links en rechts met $\pi^2/8$ te vermenigvuldigen vinden we

$$\frac{\pi^4}{96} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{(2l+1)^4}.$$