Uitwerkingen Herkansing Functies en Reeksen, 9 januari 2020

Opgave 1

(a) Aangezien f C^1 is, is f differentieerbaar, en geldt de kettingregel. Dus

$$\frac{d}{dt}f(tv) = Df(tv)\frac{d}{dt}(tv) = Df(tv)v = D_1f(v)v_1 + D_2f(v)v_2.$$

(b) Aangezien de functies D_1f en D_2f C^1 zijn kunnen we (a) toepassen en volgt:

$$\frac{d}{dt}D_jf(tv) = D_1(D_jf)(tv)v_1 + D_2(D_jf)(tv)v_2$$

Door toepassen van de productregel volgt daarom uit het in (a) gevondene dat

$$\frac{d^2}{dt^2}f(tv) = \sum_{j=1}^{2}\frac{d}{dt}(D_j(f(tv))v_j = \sum_{j=1}^{2}\sum_{i=1}^{2}D_i(D_jf)(tv)v_iv_j.$$

Door invullen van $t = 0$ volgt

$$\left.\frac{d^2}{dt^2}f(tv)\right|_{t=0} = \sum_{j=1}^{2}\sum_{i=1}^{2}D_iD_jf(0)v_iv_j = \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}H_{ij}v_iv_j$$

met $H_{ij} = D_iD_jf(0)$. Aangezien f een C^2-functie is, geldt $D_iD_jf = D_jD_if$ dus H is symmetrisch.

Opgave 2

(a) Zij $t > 0$. De functie $f_t : x \mapsto x^{-1}\sin xe^{-tx}$ is continu voortzetbaar tot $[0, \infty[$, dus Riemann integreerbaar over $[0, R]$ voor iedere $R > 0$. Voor $x \geq 1$ geldt:

$$|f_t(x)| \leq e^{-tx}.$$

Aangezien het rechterlid (als functie van x) oneigenlijk Riemann-integreerbaar is over $[1, \infty[$ volgt met het majorantie criterium dat f_t absoluut integreerbaar is over $[1, \infty[$. Met het voorgaande volgt hieruit tenslotte dat f_t oneigenlijk Riemann-integreerbaar is over $[0, \infty[$.

(b) Zij $0 < a$ willekeurig. Dan geldt voor $t > a$ en $x > 0$ dat

$$\frac{\partial}{\partial t}f_t(x) = -\sin xe^{-tx},$$

dus $x \mapsto \frac{\partial}{\partial t}f_t(x)$ is continu, en derhalve lokaal Riemann integreerbaar op $[0, \infty[$ in de variabele x, terwijl

$$\left|\frac{\partial}{\partial t}f_t(x)\right| \leq e^{-ax}, \qquad (x > 0).$$

Aangezien de functie in het rechterlid oneigenlijk integreerbaar is over $[0,\infty[$ volgt met een stelling uit het diktaat dat F differentieerbaar is op $]a,\infty[$, met als afgeleide

$$F'(t) = \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial t} f_t(x)\, dx = -\int_0^\infty \sin x e^{-tx}\, dx, \qquad (t > a).$$

Voor iedere $t > 0$ bestaat een $a > 0$ zo dat $t \in]a,\infty[$. Derhalve is F differentieerbaar op $]0,\infty[$ met de genoemde afgeleide.

Opgave 3

(a) Voor $x \geq 0$ geldt:

$$\begin{aligned} |f(x)-\alpha| &= |f(x) - f_n(x) + f_n(x) - \alpha| \\ &\leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - \alpha| \\ &\leq \|f - f_n\|_{[0,\infty[} + |f_n(x) - \alpha|. \end{aligned}$$

(b) Zij $\varepsilon > 0$. Wegens de uniforme convergentie van de rij (f_n) bestaat er een $N \in \mathbb{N}$ zo dat

$$n \geq N \Rightarrow \|f - f_n\|_{[0,\infty[} < \varepsilon/2$$

Kies nu $n = N$. Dan geldt wegens (a) dat

$$|f(x) - \alpha| < |f_n(x) - \alpha| + \varepsilon/2, \qquad (*)$$

voor alle $x \geq 0$.

Nu is $\lim_{x\to\infty} f_n(x) = \alpha$, dus er bestaat een $R > 0$ zo dat

$$x > R \Rightarrow |f_n(x) - \alpha| < \varepsilon/2.$$

Combineren we dit met (*) dan vinden we dus voor alle $x > R$ dat:

$$|f(x) - \alpha| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

Voor iedere $\varepsilon > 0$ bestaat dus een $R > 0$ zo dat $x > R \Rightarrow |f(x) - \alpha| < \varepsilon$. Hieruit volgt het gevraagde.

Opgave 4

(a) Voor $k \geq 1$ geldt:

$$\left|\frac{c_{k+1}}{c_k}\right| = \left|\frac{2k+1}{k+1}\right| = \left|\frac{2+\frac{1}{k}}{1+\frac{1}{k}}\right|$$

waaraan we zien dat $|c_{k+1}/c_k| \to 2$ voor $k \to \infty$. Hieruit volgt dat de convergentiestraal gelijk is aan aan $1/2$.

(b) De functie f is complex differentieerbaar binnen zijn convergentiecirkel, dus op $D(0; \frac{1}{2})$. Zijn afgeleide wordt gegeven door termsgewijs te differentiëren. Dus voor $|z| < \frac{1}{2}$ geldt:

$$\begin{aligned}
(1-2z)f'(z) &= \sum_{k=1}^{\infty} kc_k z^{k-1} - 2z \sum_{k=1}^{\infty} kc_k z^{k-1} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)c_{k+1} z^k - \sum_{k=1}^{\infty} 2kc_k z^k \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \left[(k+1)c_{k+1} - 2kc_k\right] z^k \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \left[(2k+1)c_k - 2kc_k\right] z^k = f(z).
\end{aligned}$$

(c) De functie $\varphi : z \mapsto (1-2z)f(z)^2$ is complex differentieerbaar op $D(0; \frac{1}{2})$ met als afgeleide:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dz}(1-2z)f(z)^2 &= -2f(z)^2 + 2(1-2z)f'(z)f(z) \\
&= 2\left[(-f(z) + (1-2z)f'(z)\right] f'(z) = 0.
\end{aligned}$$

Hieruit volgt dat φ constant is. Invullen van $z = 0$ levert $\varphi(0) = f(0)^2 = c_0^2 = 1$, dus $\varphi(z) = 1$ voor alle $z \in D(0; \frac{1}{2})$. Hieruit volgt het gestelde.

Opgave 5

(a) Er geldt dat

$$\begin{aligned}
c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ax} e^{-ikx}\, dx &= \frac{1}{2\pi} \frac{e^{(a-ik)x}}{a-ik} \bigg|_{-\pi}^{\pi} \\
= \frac{1}{2\pi}(-1)^k \frac{e^{a\pi} - e^{-a\pi}}{a-ik} &= \frac{(-1)^k \sinh(a\pi)}{\pi(a-ik)}.
\end{aligned}$$

(b) Volgens de identiteit van Parseval geldt:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2\, dx = \sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_k|^2. \quad (*)$$

Het linkerlid van (*) is gelijk aan

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{2ax}\, dx = \frac{\sinh(2a\pi)}{2a\pi} = \frac{\sinh(a\pi)}{a\pi} \cosh(a\pi).$$

Uit $|c_k|^2 = (\sinh a\pi)^2/\pi^2(a^2+k^2)$ volgt dat het rechterlid van (*) gelijk is aan

$$\frac{(\sinh a\pi)^2}{(a\pi)^2}\left(1+2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a^2}{a^2+k^2}\right).$$

Uit (*) volgt dus de gewenste identiteit.