Herkansing Functies en Reeksen — 9 januari 2020, 17:00-20:00

- Schrijf op ieder vel **je naam** en bovendien op het eerste vel je **studentnummer** en het **aantal ingeleverde vellen**.
- Geef niet alleen antwoorden, maar laat ook zien hoe je aan die antwoorden gekomen bent.
- **N.B.** Als je een stelling uit het dictaat gebruikt, vermeld dat dan en laat ook expliciet zien dat de voorwaarden van die stelling vervuld zijn.
- **N.B.** Als je een onderdeel van een opgave niet kunt maken, **ga dan toch door met de volgende onderdelen.** Je mag daarbij de in eerdere onderdelen verschafte informatie gebruiken.
- Rekenmachine, diktaat en aantekeningen mogen niet worden gebruikt.
- De te behalen punten worden overal in de kantlijn aangegeven. Het totaal aantal te behalen punten is 50. Het cijfer voor deze herkansing is het aantal behaalde punten gedeeld door 5, met heeltallige afronding onder de 6, en halftallige daarboven.

Succes !

10 pt totaal **Opgave 1** We beschouwen een functie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ die C^1 is.

4 pt (a) Zij $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$. Toon aan dat voor alle $t \in \mathbb{R}$ geldt:

$$\frac{d}{dt}[f(tv)] = D_1 f(tv)v_1 + D_2 f(tv)v_2.$$

6 pt (b) Veronderstel nu dat f een C^2-functie is. Bewijs dat er een 2x2-matrix $H = (H_{ij}) \in \mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$ bestaat zo dat voor elke $v \in \mathbb{R}^2$ geldt:

$$\frac{d^2}{dt^2}[f(tv)]\bigg|_{t=0} = \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} H_{ij} v_i v_j.$$

Druk de matrix H expliciet uit in tweede orde partiële afgeleiden van f en toon aan dat H symmetrisch is (dwz. $H_{12} = H_{21}$).

10 pt totaal **Opgave 2**

5 pt (a) Toon aan dat voor elke $t > 0$ de integraal

$$F(t) := \int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\, e^{-tx}\, dx$$

absoluut convergent is. Aldus wordt een functie $F :]0, \infty[\to \mathbb{R}$ gedefineerd.

5 pt (b) Toon aan dat F differentieerbaar is op $]0, \infty[$ en dat voor alle $t > 0$ geldt:

$$F'(t) = -\int_0^\infty \sin x\; e^{-tx} dx.$$

Hint: bewijs de differentieerbaarheid van F op $]a, \infty[$, voor iedere $a > 0$.

ZOZ

10 pt totaal **Opgave 3** Gegeven is een rij van functies $f_n : [0,\infty[\to \mathbb{C}$ $(n \geq 1)$ die op $[0,\infty[$ uniform convergeert naar een functie $f : [0,\infty[\to \mathbb{C}$.
Gegeven is ook dat er een $\alpha \in \mathbb{C}$ bestaat zo dat voor elke $n \geq 1$ geldt:

$$\lim_{x\to\infty} f_n(x) = \alpha.$$

4 pt (a) Toon aan dat voor elke $x \geq 0$ geldt

$$|f(x) - \alpha| \leq \|f - f_n\|_{[0,\infty[} + |f_n(x) - \alpha|.$$

6 pt (b) Bewijs dat $\lim_{x\to\infty} f(x) = \alpha$.

10 pt totaal **Opgave 4** We definiëren een rij complexe getallen $(c_k)_{k\geq 0}$ door $c_0 = 1$ en

$$c_{k+1} = \frac{(2k+1)c_k}{k+1}, \qquad (k \geq 0).$$

3 pt (a) Toon aan dat de machtreeks $\sum_{k\geq 0} c_k z^k$ convergentiestraal $\frac{1}{2}$ heeft.

4 pt (b) Toon aan dat de functie $f : z \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ complex differentieerbaar is op de open schijf $D(0; \frac{1}{2})$ en voldoet aan:

$$(1-2z)f'(z) = f(z), \qquad (|z| < \tfrac{1}{2}).$$

3 pt (c) Toon aan dat

$$f(z)^2 = \frac{1}{1-2z}, \qquad (|z| < \tfrac{1}{2}).$$

10 pt totaal **Opgave 5** We beschouwen de 2π-periodieke functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die voor $-\pi < x \leq \pi$ gegeven wordt door

$$f(x) = e^{ax}.$$

Hierin is $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$.

4 pt (a) Bepaal de Fourier-coëfficiënten $c_k = \mathcal{F}(f)_k$ voor alle $k \in \mathbb{Z}$.

6 pt (b) Bewijs dat

$$\frac{a\pi \cosh(a\pi)}{\sinh(a\pi)} = 1 + 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a^2}{a^2 + k^2}.$$