Inleiding Kansrekening en Statistiek (WISB 161)
Eindtentamen

Sjoerd Dirksen

30 januari 2020, 13:30-16:30

Dit tentamen bestaat uit 6 vragen, die in totaal 45 punten waard zijn. Schrijf op elk ingeleverd blad je naam en studentnummer. Voorzie elk antwoord van een zorgvuldige motivatie. Vereenvoudig je antwoord voor zover mogelijk. Je mag gebruik maken van de bijgevoegde tabel.

Vraag 1 [6 punten]

Joop is op zoek naar zijn tabel met kritieke waarden van de standaard normale verdeling. Hij heeft de tabel in één van drie mappen gestopt maar heeft geen idee meer in welke: hij stopt de tabel altijd in een willekeurige map. Joop heeft haast en bladert daarom snel door de mappen heen. Uit ervaring weet Joop dat als een blad papier in map i ligt, dat dan de kans dat hij deze door te bladeren vindt gelijk is aan p_i. Stel dat Joop eerst door map 3 bladert en de tabel niet vindt. Wat is de kans dat de tabel toch in deze map ligt?

Vraag 2 [7 punten]

Zij (X, Y) een continue kansvector met kansdichtheid

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} \frac{e^{-x/y}e^{-y+1}}{y} & \text{als } x > 0 \text{ en } y > 1 \\ 0 & \text{elders.} \end{cases}.$$

Bereken de variantie van Y.

Vraag 3 [8 punten]

Bij de invoering van de euro werd door Finse statistici beweerd dat een doorsnee Belgische euromunt niet zuiver zou zijn, d.w.z., de kans p dat deze op kop valt zou ongelijk zijn aan $\frac{1}{2}$. Studenten Wanda en Sybren willen daarom een schatting van p maken. Ze nemen daarom een Belgische euromunt en gooien de munt op totdat de munt voor de eerste keer op kop valt. Ze herhalen dit experiment n keer, steeds met een andere munt. Zij, voor elke $1 \leq i \leq n$, Y_i de eerste keer dat de munt op kop gevallen is in experiment i.

(a) Als schatter voor p gebruiken Wanda en Sybren

$$G_n = \frac{1}{\bar{Y}_n},$$

waarbij $\bar{Y}_n$ het gemiddelde van $Y_1, \ldots, Y_n$ is. Onderzoek of G_n een consistente schatter is.

Hint: laat eerst zien dat $\mathbb{E}(Y_1) = \frac{1}{p}$.

(b) Onderzoek of G_n een zuivere schatter is.

Vraag 4 [8 punten]

Op een woensdagochtend wordt een trekkertje uit collegezaal Pangea gestolen. Een getuige beweert dat hij gezien heeft dat Arie de collegezaal met het trekkertje heeft verlaten. De politie weet dat getuigenissen niet 100% betrouwbaar zijn en besluit Arie daarom te onderwerpen aan een test met een leugendetector. Uit statistisch onderzoek is bekend dat de leugendetector niet zeer betrouwbaar is. Als een persoon de waarheid spreekt, dan wordt in 1 van de 10 gevallen foutief een leugen gedetecteerd. Als een persoon liegt, dan wordt slechts in 8 van de 10 gevallen correct gedetecteerd dat de persoon liegt. De politie besluit Arie lang te verhoren en in totaal 25 keer te vragen of hij het trekkertje gestolen heeft. We gaan er van uit dat Arie niet zal bekennen. We noteren de resultaten van de leugendetector met $X_1, \ldots, X_{25}$, waarbij $X_i = 1$ als een leugen bij vraag i gedetecteerd wordt en $X_i = 0$ anders. De politie gaat er bij voorbaat van uit dat Arie onschuldig is, maar als bij 5 of meer vragen een leugen gedetecteerd wordt, dan stuurt de politie Arie naar de gevangenis.

(a) Zij p^* de kans dat er bij het beantwoorden van een vraag door Arie een leugen gedetecteerd wordt. Beargumenteer dat de politie een statistische toets uitvoert voor het beslisprobleem

$$H_0 : p^* = \frac{1}{10} \qquad \text{versus} \qquad H_1 : p^* = \frac{8}{10}.$$

(b) Gebruik een normale benadering om een benadering te geven van de kans op een fout van type I bij de door de politie gebruikte statistische toets.

Vraag 5 [8 punten]

Zij X een continue kansvariabele waarvan bekend is dat zijn kansdichtheid wordt gegeven door

$$f_X(x) = \frac{e^{-(x-\theta^*)}}{(1 + e^{-(x-\theta^*)})^2}, \qquad x \in \mathbb{R},$$

waarbij $\theta^* \in \mathbb{R}$ een onbekende parameter is. Zij $X_1, \ldots, X_n$ een steekproef uit de verdeling van X.

(a) Laat zien dat een maximaal aannemelijke schatter van θ^* bestaat en laat zien dat deze uniek is. Maak daarbij gebruik van de stelling van Bolzano, die zegt dat elke continue functie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ die zowel positieve als negatieve waarden aanneemt een nulpunt in $[a, b]$ heeft. Je mag aannemen dat de exponentiële functie continu is.

(b) Zij $n = 2$ en $(x_1, x_2) = (0, -1)$ de realisatie van de steekproef. Bepaal de meest aannemelijke schatting van θ^*.

Hint: Als onderdeel (a) niet gelukt is, dan is het nog steeds mogelijk om onderdeel (b) te maken.

Vraag 6 [8 punten]

Zij $X \sim \text{Bin}(2, \frac{1}{2})$ en zij Y uniform verdeeld op het interval $[4, 16]$. Neem aan dat X en Y onafhankelijk zijn. Bepaal de verdelingsfunctie van de kansvariabele

$$Z = Y^{\cos(\pi X)}.$$

Bepaal de medianen van Z voor 1 bonuspunt.