Inleiding Kansrekening en Statistiek (WISB 161)
Hertentamen

Sjoerd Dirksen

14 april 2020, 09:00-12:00

Dit tentamen bestaat uit 6 vragen en 1 bonusvraag. Schrijf op het eerste blad van jouw uitwerkingen jouw naam en studentnummer en nummer alle pagina's. Voorzie elk antwoord van een zorgvuldige motivatie. Vereenvoudig je antwoord voor zover mogelijk. Je mag gebruik maken van een rekenmachine.

Vraag 1 [6 punten]

Zij (X, Y) een discrete kansvector die waarden aanneemt in $\{0, 1, 2\} \times \{0, 1, 2\}$. De waarden van de kansfunctie van (X, Y) worden gegeven in de onderstaande tabel.

	-1	0	1
-1	$\frac{1}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{16}$
0	$\frac{3}{16}$	0	$\frac{3}{16}$
1	$\frac{1}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{16}$

Bereken de covariantie tussen X en Y. Zijn X en Y onafhankelijk?

Vraag 2 [7 punten]

Zij X een continue kansvariabele, $\alpha \in \mathbb{R}$, en definieer $F : \mathbb{R} \to [0, 1]$ door

$$F(z) = \mathbb{P}(X \leq z \mid X \geq \alpha).$$

(a) Laat zien dat voor $z \geq \alpha$ geldt

$$F(z) = \frac{F_X(z) - F_X(\alpha)}{1 - F_X(\alpha)},$$

waarbij F_X de verdelingsfunctie van X is. Toon aan dat F de verdelingsfunctie van een kansvariabele Z is.

(b) Stel dat X de levensduur van een accu in uren is. Neem aan dat de kansdichtheid van X gegeven wordt door

$$f_X(x) = \begin{cases} xe^{-x^2/2} & \text{als } x \geq 0 \\ 0 & \text{elders.} \end{cases}$$

Geef een interpretatie van de verwachting van Z en bereken deze. Druk je antwoord uit in termen van de standaard normale verdelingsfunctie.

Vraag 3 [5 punten]

Laat X en Y onafhankelijke kansvariabelen zijn die beide Bernoulli verdeeld zijn met parameter p. Definieer

$$Z = ((X + 1)^Y)^{X+2} + X(1 - X)^{Y+1}.$$

Bepaal alle p zodat $\mathbb{E}Z \geq 3$.

Vraag 4 [6 punten]

Wiskundestudenten Guiseppe en Chiara zitten in lockdown in hun studentenhuis in Turijn en vervelen zich te pletter. Om de tijd te verdrijven spelen ze een spelletje. Guiseppe vult een doos met m ballen met de nummers 1 tot en met m. Chiara krijgt de doos en mag n keer blind een bal uit de doos trekken om het totaal aantal ballen m in de doos te raden. Na iedere trekking moet zij de bal weer terug in de doos doen. Chiara gebruikt als schatter van m het grootste getal T_n dat zij na n trekkingen op een bal gezien heeft.

(a) Bereken de verdelingsfunctie van T_n en laat zien dat

$$\mathbb{P}(T_n \leq t) \to \begin{cases} 0 & \text{als } t < m \\ 1 & \text{als } t \geq m \end{cases}$$

voor $n \to \infty$.

(b) Laat zien dat T_n een consistente schatter van m is.

Vraag 5 [6 punten]

President Loekie Sjenkie van Blauwe-Rusjes-Land heeft in een toespraak verkondigd dat de inwoners van zijn land immuun zijn voor het coronavirus en dat ze zonder zorgen in een stadion naar een voetbalwedstrijd kunnen gaan kijken. Dr. Semenov vertrouwt het niet en besluit de data van de intensive care in zijn ziekenhuis te analyseren. Hij weet dat de patiënten normaal gesproken arriveren volgens een Poisson proces met intensiteit $\lambda = 1$ per uur en vermoedt dat deze intensiteit zich door de virusuitbraak verdubbeld heeft. Hij toetst daarom

$$H_0 : \lambda = 2 \qquad \text{v.s.} \qquad H_1 : \lambda = 1$$

Hij bekijkt het aantal patiënten X dat in de afgelopen 3 uur is aangekomen en gebruikt als toetscriterium

$$\text{verwerp } H_0 \text{ als } X \leq n,$$

waarbij $n \in \mathbb{N} \cup \{0\} = \{0, 1, 2, \ldots\}$.

(a) Beschrijf de type I fout en de type II fout van de toets in woorden. Is de toets op een juiste manier opgezet?

(b) Voor Dr. Semenov is de maximaal acceptable kans op een type I fout gelijk aan 1%. Welke waarde voor n kan hij het beste kiezen?

(c) Maak een afschatting van de type II fout met behulp van Chebyshev's ongelijkheid als $n = 3$.

Vraag 6 [6 punten]

Zij X een kansvariabele met verdelingsfunctie

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - \left(\frac{\kappa^*}{x}\right)^{\mu^*} & \text{als } x \geq \kappa^* \\ 0 & \text{elders,} \end{cases}$$

waarbij $\kappa^* > 0$, $\mu^* > 0$ onbekende parameters zijn. Bepaal een meest aannemelijke schatter $(\hat{\kappa}, \hat{\mu})$ voor (κ^*, μ^*) op basis van een steekproef $X_1, \ldots, X_n$ uit de verdeling van X.

Hint: bepaal eerst een meest aannemelijke schatter voor κ^* onder de aanname dat μ^* bekend is.

Bonusvraag [2 punten]

Zij $S \subset \mathbb{R}^2$ gegeven door

$$S = \{(x, y) \ : \ |x| + |y| \leq 1\}$$

en zij (X, Y) uniform verdeeld in S. Bepaal $\mathbb{P}(-X < Y)$.