Tentamen Lineaire algebra 2 (WISB108)
Dinsdag 28 januari 2020 13.30-16.30

Docent: *Barbara van den Berg*
Opmerking: *Dit tentamen beslaat de stof van 3.75 EC.*

- GEBRUIK EEN APART VEL VOOR IEDERE OPGAVE.
- Schrijf je naam en studentnummer op elk vel.
- Het gebruik van telefoons, computers, rekenmachines, boeken of aantekeningen is niet toegestaan.
- **Geef niet alleen antwoorden, maar laat bij elke (deel)opgave duidelijk zien hoe je aan je antwoorden komt en bewijs je beweringen.**
- Je kunt de opgaven in willekeurige volgorde maken. Ook als je antwoord niet volledig is, kun je er punten voor krijgen. Als je een onderdeel van een opgave niet kunt bewijzen, mag je dat resultaat in het vervolg wel gebruiken.
- Het tentamen heeft vier opgaven. De verdeling van de punten is als volgt:
  - opgave 1: 30 punten
  - opgave 2: 25 punten
  - opgave 3: 25 punten
  - opgave 4: 20 punten

Opgave 1 (nieuw vel papier)

Laat $\mathbb{R}[X]_{\leq 1}$ de vectorruimte zijn van polynomen met graad ≤ 1, uitgerust met de standaardbasis $E = \{1, X\}$. Laat $A : \mathbb{R}[X]_{\leq 1} \to \mathbb{R}[X]_{\leq 1}$ de afbeelding zijn gedefinieerd door

$$A(p(X)) = p(X) + Xp'(X) + p'(X).$$

(a). (*8 punten*) Bewijs dat de afbeelding A een lineaire afbeelding is.

Uitwerking. De afbeelding A is een lineaire afbeelding als het voldoet aan de volgende twee eigenschappen:

(a) Voor alle $p(X), q(X) \in \mathbb{R}[X]_{\leq 1}$ geldt $A(p(X) + q(X)) = A(p(X)) + A(q(X))$.

(b) Voor alle $p(X) \in \mathbb{R}[X]_{\leq 1}$ en $\lambda \in \mathbb{R}$ geldt $A(\lambda p(X)) = \lambda A(p(X))$.

Bewijs van (a): Laat $p(X), q(X) \in \mathbb{R}[X]_{\leq 1}$ willekeurig, dan geldt met behulp van de somregel voor afgeleiden dat:

$$\begin{aligned}
A(p(X) + q(X)) &= p(X) + q(X) + X(p(X) + q(X))' + (p(X) + q(X))' \\
&= p(X) + q(X) + X(p(X)' + q(X)') + p(X)' + q(X)' \\
&= p(X) + Xp(X)' + p(X)' + q(X) + Xq(X)' + q(X)' \\
&= A(p(X)) + A(q(X)).
\end{aligned}$$

Bewijs van (b): Laat $p(X) \in \mathbb{R}[X]_{\leq 1}$ en $\lambda \in \mathbb{R}$ willekeurig, dan geldt met behulp van de productregel voor afgeleiden dat:

$$\begin{aligned} A(\lambda p(X)) &= \lambda p(X) + X(\lambda p(X))' + (\lambda p(X))' \\ &= \lambda p(X) + X\lambda p(X)' + \lambda p(X)' \\ &= \lambda(p(X) + Xp(X)' + p(X)') \\ &= \lambda A(p(X)). \end{aligned}$$

(b). (*12 punten*) Ga na of de afbeelding A diagonaliseerbaar is. Zo ja, geef een matrix S zodat $S^{-1}A_E^E S$ een diagonaalmatrix is.

Uitwerking. We berekenen eerst de coëfficiëntenmatrix A_E^E van A. Er geldt: $A(1)_E = (1+X0+0)_E = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ en $A(X)_E = (X+X+1)_E = (2X+1)_E = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$, dus $A_E^E = \begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 2\end{pmatrix}$. Vervolgens berekenen we de eigenwaarden van A_E^E met behulp van de eigenwaardevergelijking $\det(A_E^E - \lambda I) = (1-\lambda)(2-\lambda) = 0$. We vinden de twee oplossingen $\lambda_1 = 1$ en $\lambda_2 = 2$. We zien dat A_E^E twee verschillende eigenwaarden heeft, en we concluderen dat (volgens een stelling in het dictaat) A twee bijbehorende eigenvectoren heeft die onafhankelijk zijn. Dit betekent dat $\mathbb{R}[X]_{\leq 1}$ een basis heeft van eigenvectoren van A, en dus is de afbeelding diagonaliseerbaar. De kolommen van de gevraagde matrix S bestaan uit de coördinaten van twee gekozen eigenvectoren die behoren bij de twee eigenwaarden. Voor iedere λ_i (met $i = 1,2$) wordt de eigenvector gegeven door een vector die de nulruimte van $A - \lambda_i I$ opspant. Het bijbehorende stelsel vergelijkingen voor λ_1 wordt gegeven door

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

We kunnen dus kiezen $v_1 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$. Voor λ_2 vinden we het stelsel

$$\left(\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

en we kunnen dus kiezen $v_2 = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$.

Definieer $S = \begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{pmatrix}$, dan is $S^{-1} = \begin{pmatrix}1 & -1\\0 & 1\end{pmatrix}$ en we zien dat

$$\begin{pmatrix}1 & -1\\0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 2\end{pmatrix}.$$

(c). (*10 punten*) Is de matrix $B = \begin{pmatrix}2 & 0\\1 & 2\end{pmatrix}$ diagonaliseerbaar?

Uitwerking. We berekenen eerst de eigenwaarden van B met behulp van de eigenwaardevergelijking $\det(B - \lambda I) = (2-\lambda)^2 = 0$. We vinden als enige oplossing $\lambda = 2$, met algebraïsche multipliciteit 2. De bijbehorende eigenruimte E_2 wordt gegeven door de oplossingsverzameling van het stelsel

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

en dus $E_2 = \{\lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} | \lambda \in \mathbb{R}\}$. We zien dat E_2 1-dimensionaal is, dus de meetkundige multipliciteit van de eigenwaarde $\lambda = 2$ is 1. Omdat de meetkundige multipliciteit strikt kleiner is dan de algebraïsche multipliciteit, kunnen we geen basis voor $\mathbb{R}^2$ vinden van eigenvectoren van B, en dus is B niet diagonaliseerbaar.

Opgave 2 (nieuw vel papier)

Laat $M_{2,2}$ de vectorruimte zijn van 2×2 matrices met reële coëfficiënten. We definiëren de lineaire afbeelding $T : M_{2,2} \to M_{2,2}$ door $T(A) = A^t$ voor iedere $A \in M_{2,2}$. Hierbij is A^t de getransponeerde matrix van A. Je mag als gegeven aannemen dat de afbeelding T lineair is.

(a). (*8 punten*) Bewijs dat elke eigenwaarde van T gelijk is aan 1 of -1 zonder expliciet het eigenwaardepolynoom van T te berekenen (Hint: bekijk de afbeelding $T \circ T$ die je krijgt door T twee keer toe te passen.)

Solution. The linear map $T \circ T$ sends a matrix A to $(A^t)^t = A$. If λ is an eigenvalue of T, there exists a non zero eigenvector $A \in M_{2,2}$ satisfying $T(A) = \lambda \cdot A$. Then

$$A = (T \circ T)(A) = T(\lambda \cdot A) = \lambda \cdot T(A) = \lambda^2 A$$

Since A is a non-zero matrix, the equality above implies $\lambda^2 = 1$, hence $\lambda = +1$ or $\lambda = -1$.

Voor iedere scalair $\lambda \in \mathbb{R}$ is de ruimte E_λ gedefinieerd door: $E_\lambda = \{A \in M_{2,2} | T(A) = \lambda A\}$.

(b). (*2 punten*) Hoe worden de matrices in E_1 genoemd?

Solution. An eigenvector A of T with eigenvalue 1 satisfies $A^t = T(A) = A$. Matrices with this property are called symmetric matrices.

(c). (*5 punten*) Geef een basis van eigenvectoren van T voor E_1.

Solution. The most general symmetric matrix has the form $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$, for $a, b, c \in \mathbb{R}$. Consequently, the set of matrices

$$\mathcal{B}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

is a set of generators of E_1. Moreover, the matrices in $\mathcal{B}_1$ are linearly independent since the equation

$$\alpha \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \gamma \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

for $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, admits only the solution $(\alpha, \beta, \gamma) = (0, 0, 0)$.

(d). (*5 punten*) Geef een basis van eigenvectoren van T voor E_{-1}.

Solution. Since $T(A) = A^t$, E_{-1} is the set of 2×2 skew-symmetric matrices. The most general skew-symmetric matrix has the form $A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}$, for $a \in \mathbb{R}$. Consequently, the matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

generates E_{-1}; since it is not the zero matrix, we conclude that the set

$$\mathcal{B}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

is a basis of E_{-1}.

(e). (*5 punten*) Concludeer dat de afbeelding T diagonaliseerbaar is.

Solution. The vector space $M_{2,2}$ has dimension 4; in fact, the set

$$\mathcal{B}_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

is a basis of $M_{2,2}$. The union $\mathcal{B}_4 = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ of the basis of E_1 and E_{-1} is a set of 4 linearly independent vectors of $M_{2,2}$. Consequently, it is a basis of $M_{2,2}$. Since $M_{2,2}$ has a basis consisting of eigenvectors of T the linear map T is diagonalizable.

Opgave 3 (nieuw vel papier)

In deze opgave bekijken we de vectorruimte $\mathbb{R}^4$ met het standaardinproduct tussen vectoren. Laat W de deelruimte zijn van $\mathbb{R}^4$ opgespannen door de drie vectoren

$$\mathbf{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{v_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{v_3} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Je hoeft niet te bewijzen dat deze drie vectoren onafhankelijk zijn.

(a). (*15 punten*) Bepaal een orthonormale basis van W.
Uitwerking. Uit de gegeven basis $\{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3}\}$ leiden we met behulp van de Gram-matrix een orthogonale basis af van W. De Gram-matrix met op de (i,j)-de plek $< \mathbf{v_i}, \mathbf{v_j} >$ is gelijk aan:

$$\left(\begin{array}{ccc|cccc} 4 & 4 & 8 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 6 & 14 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 8 & 14 & 58 & 3 & 2 & -3 & 6 \end{array}\right)$$

Door eerst in de eerste kolom te vegen en daarna in de tweede kolom vinden we:

$$\left(\begin{array}{ccc|cccc} 4 & 4 & 8 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 6 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 24 & -2 & 0 & -2 & 4 \end{array}\right).$$

In de rijen in de rechtermatrix vinden we een orthogonale basis van W. Door iedere vector te delen door de lengte van de vector vinden we een orthonormale basis voor W

$$\mathbf{w_1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{w_2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{w_3} = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

(b). (*7 punten*) Bepaal de loodrechte projectie van $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ op W.

Uitwerking. We noteren met $P_W(\mathbf{v})$ de loodrechte projectie van $\mathbf{v}$ op W. Omdat $\{\mathbf{w_1}, \mathbf{w_2}, \mathbf{w_3}\}$ een orthonormale basis is, geldt dat:

$$P_W(\mathbf{v}) = <\mathbf{v}, \mathbf{w_1}> \mathbf{w_1} + <\mathbf{v}, \mathbf{w_2}> \mathbf{w_2} + <\mathbf{v}, \mathbf{w_3}> \mathbf{w_3}.$$

Invullen van de vectoren geeft:

$$\begin{aligned} P_W(\mathbf{v}) &= < \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} > \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + < \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} > \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &+ < \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} > \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{6}(-1)\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{6} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

(c). (*3 punten*) Is de lineaire afbeelding $P_W : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ die aan iedere vector $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^4$ de loodrechte projectie van $\mathbf{v}$ op W toevoegt een orthogonale afbeelding?

Uitwerking. De lineaire afbeelding P_W is orthogonaal als voor iedere vector $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^4$ geldt dat $\|P_W(\mathbf{v})\| = \|\mathbf{v}\|$. Kies voor $\mathbf{v}$ de vector uit onderdeel (b), dan zien we dat $\|P_W(\mathbf{v})\| = \sqrt{\frac{1}{36}(49 + 9 + 1 + 1)} = \sqrt{\frac{60}{36}} < \sqrt{2} = \|\mathbf{v}\|$. We concluderen dat P_W geen orthogonale afbeelding is.

Opgave 4 (nieuw vel papier)

Laat V een vectorruimte zijn met coëfficiënten in $\mathbb{R}$. Een deelverzameling S van V heet lineair onafhankelijk als ieder n-tal vectoren uit S lineair onafhankelijk is (met $n \geq 1$).

(a). (*2 punten*) Laat S een lineair onafhankelijke deelverzameling zijn van V. Waarom is de nulvector $\mathbf{0}$ geen element van S?

Uitwerking. Stel dat $\mathbf{0} \in S$. Bekijk dan de eindige deelverzameling $\{\mathbf{0}\}$ van S. Deze deelverzameling is afhankelijk, aangezien $1 \cdot \mathbf{0}$ een niet-triviale lineaire combinatie is die de nulvector oplevert. Dus S is zelf ook afhankelijk, tegenspraak.

Laat W een tweede vectorruimte zijn met coëfficiënten in $\mathbb{R}$ en $T : V \to W$ een lineaire afbeelding.

(b). (*8 punten*) Veronderstel dat iedere lineair onafhankelijke deelverzameling S van V onder T wordt afgebeeld op een lineair onafhankelijke deelverzameling van W. Bewijs dat T injectief is.

Uitwerking. We weten dat T injectief is dan en slechts dan als $\ker T = \{\mathbf{0}\}$, dus we gaan bewijzen dat $\ker T = \{\mathbf{0}\}$. Stel dat $\mathbf{x} \in \ker T$, oftewel dat $T(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$, en bekijk $S = \{\mathbf{x}\} \subseteq V$. Dan is $T(S) = \{T(\mathbf{x})\} = \{\mathbf{0}\}$ afhankelijk wegens opgave (a). Uit het gegeven volgt dat S zelf ook afhankelijk moet zijn, wat betekent dat $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. We concluderen dat $\ker T \subseteq \{\mathbf{0}\}$. De andere inclusie geldt voor elke lineaire afbeelding (want $T(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$), dus het gevraagde volgt.

(c). (*10 punten*) Veronderstel nu andersom dat T injectief is. Bewijs dat iedere lineair onafhankelijke deelverzameling S van V onder T wordt afgebeeld op een lineair onafhankelijke deelverzameling van W.

Uitwerking. We bewijzen de contrapositie: stel dus dat $T(S)$ afhankelijk is. Dan bestaan er (verschillende) $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n \in S$ zodat $T(\mathbf{x}_1), \ldots, T(\mathbf{x}_n)$ afhankelijk zijn. Dit betekent dat er $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$, niet allemaal gelijk aan 0, bestaan zodat:

$$\lambda_1 T(\mathbf{x}_1) + \cdots + \lambda_n T(\mathbf{x}_n) = \mathbf{0}.$$

Uit de lineariteit van T volgt dan dat:

$$T(\lambda_1 \mathbf{x}_1 + \cdots + \lambda_n \mathbf{x}_n) = \mathbf{0}.$$

Maar T is injectief, dus $\ker T = \{\mathbf{0}\}$. Uit het bovenstaande volgt dus dat:

$$\lambda_1 \mathbf{x}_1 + \cdots + \lambda_n \mathbf{x}_n = \mathbf{0}.$$

Dit betekent dat de eindige deelverzameling $\{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n\}$ van S afhankelijk is, dus S is zelf ook afhankelijk.