Tentamen Lineaire algebra 2 (WISB108)
Dinsdag 28 januari 2020 13.30-16.30

Docent: *Barbara van den Berg*
Opmerking: *Dit tentamen beslaat de stof van 3.75 EC.*

- GEBRUIK EEN APART VEL VOOR IEDERE OPGAVE.
- Schrijf je naam en studentnummer op elk vel.
- Het gebruik van telefoons, computers, rekenmachines, boeken of aantekeningen is niet toegestaan.
- **Geef niet alleen antwoorden, maar laat bij elke (deel)opgave duidelijk zien hoe je aan je antwoorden komt en bewijs je beweringen.**
- Je kunt de opgaven in willekeurige volgorde maken. Ook als je antwoord niet volledig is, kun je er punten voor krijgen. Als je een onderdeel van een opgave niet kunt bewijzen, mag je dat resultaat in het vervolg wel gebruiken.
- Het tentamen heeft vier opgaven. De verdeling van de punten is als volgt:
  - opgave 1: 30 punten
  - opgave 2: 25 punten
  - opgave 3: 25 punten
  - opgave 4: 20 punten

Opgave 1 (nieuw vel papier)

Laat $\mathbb{R}[X]_{\leq 1}$ de vectorruimte zijn van polynomen met graad ≤ 1, uitgerust met de standaardbasis $E = \{1, X\}$. Laat $A : \mathbb{R}[X]_{\leq 1} \to \mathbb{R}[X]_{\leq 1}$ de afbeelding zijn gedefinieerd door

$$A(p(X)) = p(X) + Xp'(X) + p'(X).$$

(a). (*8 punten*) Bewijs dat de afbeelding A een lineaire afbeelding is.

(b). (*12 punten*) Ga na of de afbeelding A diagonaliseerbaar is. Zo ja, geef een matrix S zodat $S^{-1}A_E^E S$ een diagonaalmatrix is.

(c). (*10 punten*) Is de matrix $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ diagonaliseerbaar?

Opgave 2 (nieuw vel papier)

Laat $M_{2,2}$ de vectorruimte zijn van 2×2 matrices met reële coëfficiënten. We definiëren de lineaire afbeelding $T : M_{2,2} \to M_{2,2}$ door $T(A) = A^t$ voor iedere $A \in M_{2,2}$. Hierbij is A^t de getransponeerde matrix van A. Je mag als gegeven aannemen dat de afbeelding T lineair is.

(a). (*8 punten*) Bewijs dat elke eigenwaarde van T gelijk is aan 1 of -1 zonder expliciet het eigenwaardepolynoom van T te berekenen (Hint: bekijk de afbeelding $T \circ T$ die je krijgt door T twee keer toe te passen.)

Voor iedere scalair $\lambda \in \mathbb{R}$ is de ruimte E_λ gedefinieerd door: $E_\lambda = \{A \in M_{2,2} | T(A) = \lambda A\}$.

(b). (*2 punten*) Hoe worden de matrices in E_1 genoemd?

(c). (*5 punten*) Geef een basis van eigenvectoren van T voor E_1.

(d). (*5 punten*) Geef een basis van eigenvectoren van T voor E_{-1}.

(e). (*5 punten*) Concludeer dat de afbeelding T diagonaliseerbaar is.

Opgave 3 (nieuw vel papier)

In deze opgave bekijken we de vectorruimte $\mathbb{R}^4$ met het standaardinproduct tussen vectoren. Laat W de deelruimte zijn van $\mathbb{R}^4$ opgespannen door de drie vectoren

$$\mathbf{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{v_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{v_3} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Je hoeft niet te bewijzen dat deze drie vectoren onafhankelijk zijn.

(a). (*15 punten*) Bepaal een orthonormale basis van W.

(b). (*7 punten*) Bepaal de loodrechte projectie van $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ op W.

(c). (*3 punten*) Is de lineaire afbeelding $P_W : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ die aan iedere vector $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^4$ de loodrechte projectie van $\mathbf{v}$ op W toevoegt een orthogonale afbeelding?

Opgave 4 (nieuw vel papier)

Laat V een vectorruimte zijn met coëfficiënten in $\mathbb{R}$. Een deelverzameling S van V heet lineair onafhankelijk als ieder n-tal vectoren uit S lineair onafhankelijk is (met $n \geq 1$).

(a). (*2 punten*) Laat S een lineair onafhankelijke deelverzameling zijn van V. Waarom is de nulvector $\mathbf{0}$ geen element van S?

Laat W een tweede vectorruimte zijn met coëfficiënten in $\mathbb{R}$ en $T : V \to W$ een lineaire afbeelding.

(b). (*8 punten*) Veronderstel dat iedere lineair onafhankelijke deelverzameling S van V onder T wordt afgebeeld op een lineair onafhankelijke deelverzameling van W. Bewijs dat T injectief is.

(c). (*10 punten*) Veronderstel nu andersom dat T injectief is. Bewijs dat iedere lineair onafhankelijke deelverzameling S van V onder T wordt afgebeeld op een lineair onafhankelijke deelverzameling van W.